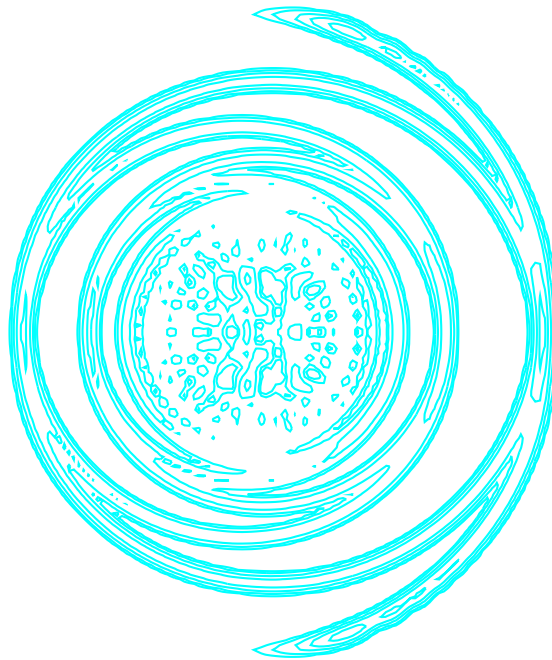


Phasendiffusion und Linienbreite beim Ein-Atom-Maser



Dissertation
der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Gunter Antesberger
aus Regensburg

München, 27. Juli 1999

1. Gutachter : Prof. Dr. Herbert Walther, Universität München
2. Gutachter : Prof. Dr. Axel Schenzle, Universität München

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 1999

für Karolina

Zusammenfassung

Der Ein-Atom-Maser (EAM) basiert auf einem in der Quantenoptik fundamentalen Modell der Licht-Materie-Wechselwirkung. Dabei wird der Energieaustausch zwischen einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes und einem materiellen Zwei-Niveau-System betrachtet. Im Experiment werden Mikrowellenresonatoren höchster Güte eingesetzt, die das Modenkontinuum des freien Raumes im relevanten Frequenzband bis auf eine Resonator-Modenfrequenz niedriger Ordnung abschirmen. Diese Mode kann auf die Übergangsfrequenz des Zwei-Niveau-Systems abgestimmt werden, das durch zwei Rydbergniveaus realisiert wird.

Der Name Ein-Atom-Maser suggeriert die Verwendung eines einzigen Atoms, obwohl im beschriebenen Experiment ein Atomstrahl mit vielen Atomen verwendet wird. Allerdings ist der Atomfluß so gering, daß die Wahrscheinlichkeit für die gleichzeitige Wechselwirkung von zwei oder mehreren Atomen sehr klein ist. In den meisten Fällen werden die Atome nacheinander in den Resonator injiziert und wechselwirken jeweils einzeln mit der Resonatormode. Dieser „Atomstrahl-Ein-Atom-Maser“ wird auch oft als Mikromaser bezeichnet (Maser mit einzelnen *-mikroskopischen-* Atomen als Pumpmedium). Hier wird aber diese begriffliche Unterscheidung nicht vorgenommen und durchgängig vom Ein-Atom-Maser, oder kurz EAM, gesprochen.

Da bei EAM-Experimenten das Feld selbst aus technischen Gründen nie direkt gemessen werden kann, muß der Atomstrahl die Doppelrolle des Pumpmediums und des Meßinstrumentes übernehmen. Folglich ist es die Aufgabe der EAM-Theorie, Zusammenhänge zwischen einer meßbaren Atomstatistik und einer entsprechenden Feldeigenschaft herzustellen. Im Falle der Phasendiffusion existierten in der Literatur bisher nur extrem schwer zu realisierende Meßmethoden [86, 90], da sie auf der Messung der im Experiment sehr empfindlichen Überlagerungsphase zwischen den beiden Maserniveaus beruhten. Deswegen werden im Theorieteil dieser Arbeit zwei alternative Vorschläge ausgearbeitet, die mit der leicht zu messenden atomaren Emissionswahrscheinlichkeit als Observable auskommen.

Beide Varianten basieren auf dem gleichen Präparationsschema des Feldzustands. Sie setzen voraus, daß das EAM-Feld zu einem Anfangszeitpunkt mit einem externen Synthesizer phasengekoppelt sei. Daraufgehend wird die Phasensymmetrie des Resonatorfeldes durch Abschalten des Synthesizers wiederhergestellt, worauf die Feldphase des EAMs zu zerlaufen beginnt. Das Zeitverhalten dieses Dekohärenzphänomens wird durch die Phasendiffusionskonstante D charakterisiert.

Die hier vorgestellten Methoden unterscheiden sich nun darin, in welcher Art und Weise nach einer bestimmten Zeit der Fortschritt der Phasendekohärenz – hier gleichbedeutend mit dem Zerfall der mittleren E-Feldstärke im Ensemblemittel – gemessen wird.

Die erste Methode erfordert die Messung mehrerer Emissionswahrscheinlichkeiten kurz nach dem Verschieben des Feldzustands um eine stets konstante Amplitude, aber unterschiedlichen Phasen. Diese Meßserie wird anschließend durch eine Fourierreihe gefiltert, dessen erster Koeffizient, wie sich zeigt, die benötigte Information enthält. Insbesondere findet man eine gute Übereinstimmung zwischen dem Zeitverhalten dieser extrahierten Zahl und der Phasendiffusionskonstanten [104, 136].

Die zweite Methode nutzt dagegen eine direkte Relation zwischen der momentanen mittleren Feldstärke der Resonatormode und einer einzelnen Emissionswahrscheinlichkeit

aus, die für bestimmte Wechselwirkungszeiten und Verschiebungsamplituden gültig ist und ermöglicht daher ein unmittelbares Mitverfolgen der Dekohärenz im Experiment. Dabei wird der aus [137] abgeleitete Zusammenhang benutzt, der die Messung der sogenannten charakteristischen Wignerfunktion an einem Phasenraumpunkt mit einer Emissionswahrscheinlichkeit ermöglicht.

Nach Abwägung der Vor- und Nachteile beider Methoden wurde bei den in dieser Arbeit vorgestellten Messungen auf die erste Methode hingearbeitet.

Der experimentelle Teil dieser Arbeit berichtet von dem Aufbau und der Inbetriebnahme des neuen schwingungsgedämpften EAM-Experiments in einem modifizierten, kommerziellen ^3He -Kryostat. Dabei konnte der resonatorinduzierte $63\text{P}_{3/2} \rightarrow 61\text{D}_{5/2}$ ^{85}Rb -Übergang bei 21.4560 GHz mit einer Linienbreite von 45 kHz aufgelöst werden.

Ferner wurde mit den speziellen Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung die durch Vibrationen verursachte inhomogene Verbreiterung des Resonatorspektrums von ursprünglichen mehreren 100 Hz auf Werte kleiner 10 Hz reduziert. Erst dieser Wert ermöglicht selbst bei hohen Güten stabile Mikrowelleneinkopplungen und garantiert reproduzierbare Phasenraumverschiebungen mittels Mikrowellenpulsen.

Bei den Phasendifusionsmessungen muß zunächst dem (phasenlosen) stationären EAM-Zustand durch schwache Ankopplung eines resonanten Synthesizers eine Vorzugsphase aufgeprägt werden. Danach wird die Einstrahlung unterbrochen, worauf die Resonatorphase frei zu diffundieren beginnt. Erst nach einer gewissen Zeit läßt man die beiden Felder wieder kurz miteinander interferieren. Dabei muß sichergestellt sein, daß die Synthesizer-Resonator-Kohärenz nicht etwa durch externe Einflüsse zerstört wird. Dazu wurde als erster Test ein Doppel-Puls-Experiment durchgeführt, mit dem Kohärenzlängen von über 10 ms – mehr als 200 Millionen Schwingungsperioden – demonstriert werden konnten.

Bei dem durchgeführten EAM-Experiment bei gleichzeitiger, zum atomaren Übergang resonanter, Synthesizerstrahlung hat sich gezeigt, daß insbesondere bei hoch angeregten Feldmoden (mehrere hundert Photonen) die Atom-Feld-Wechselwirkung nicht mehr mit der diabatischen Näherung beschrieben werden kann. Vielmehr stellt man fest, daß die externe Einstrahlung die Emission aufgrund zunehmender Adiabaticität völlig unterdrückt. Dieses Verhalten konnte theoretisch erklärt und durch Computersimulationen bestätigt werden.

Die Experimente, bei denen die Emissionswahrscheinlichkeit gegen die Modenfrequenz aufgenommen wurde, konnten die durch die Einstrahlung bedingten Strukturen mit einer Präzision von weniger als 50 Hz aufgelöst werden. Auf die dafür erforderliche Quetschamplitude des Resonatormantels bezogen, bedeutet das eine mikroskopische Hubdifferenz von weniger als 1 nm. Auch dies ist eine überzeugende Demonstration der Vibrationsarmut des Aufbaus.

Alle Messungen haben gezeigt, daß einer Phasendifusionsmessung über die „Methode der verschobenen Felder“ kein prinzipieller Hinderungsgrund mehr im Wege steht. Daher können erste Meßresultate in naher Zukunft erwartet werden.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Zusammenfassung | 7 |
| 1 Einleitung und Überblick | 11 |
| 2 Theorie des Ein-Atom-Masers | 16 |
| 2.1 Jaynes-Cummings-Modell | 16 |
| 2.2 Semiklassische Atomdynamik | 21 |
| 2.3 Dämpfung des Resonatorfeldes | 22 |
| 2.4 Mastergleichung | 23 |
| 2.5 Stationäre Photonenstatistik | 24 |
| 2.6 Erzeugung nichtklassischer Zustände | 25 |
| 2.6.1 Nichtklassische Photonenstatistik – Sub-Poisson-Bereich | 25 |
| 2.6.2 Fangzustände | 25 |
| 2.7 Die Mastergleichung als Eigenwertproblem | 27 |
| 2.8 Bedingungen an die Ein-Atom-Maser Parameter | 29 |
| 3 Kopplung eines klassischen Feldes an die Resonatormode | 31 |
| 3.1 Verschiebung im Phasenraum | 31 |
| 3.2 Phasengekoppelter Ein-Atom-Maser Zustand | 32 |
| 3.3 Atom-Feld-Synthesizer Wechselwirkung im verschobenen Bild | 34 |
| 3.4 Stationärer Zustand ohne Pumpatome | 36 |
| 3.5 Atomdynamik bei externer Einstrahlung | 36 |
| 4 Adiabaticität beim realen Ein-Atom-Maser | 39 |
| 4.1 Quantifizierung der Adiabaticität | 40 |
| 4.2 Adiabaticitätsparameter der Ein-Atom-Maser Dynamik | 41 |
| 4.3 Einfluß der Adiabaticität auf die Atom-Feld-Dynamik | 44 |
| 5 Phasendiffusion beim Ein-Atom-Maser | 45 |
| 5.1 Der Begriff Phasendiffusion | 45 |
| 5.2 Besonderheiten des Ein-Atom-Masers | 46 |
| 5.3 Hochfeldnäherung der Phasendiffusionskonstante | 47 |
| 5.3.1 Thermischer Anteil | 47 |
| 5.3.2 Die Phasenkicks der Atom-Feld-Wechselwirkung | 48 |
| 5.4 Exakte Analyse der Phasendiffusionskonstante | 50 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Meßmethoden der Ein-Atom-Maser Phasendiffusion | 54 |
| 6.1 | Bisherige Vorschläge phasensensitiver Messungen | 55 |
| 6.2 | Methode der verschobenen Felder | 56 |
| 6.2.1 | Verschiebungen auf einem Kreis | 60 |
| 6.2.2 | Messung der charakteristischen Funktion | 66 |
| 6.2.3 | Bewertung der Methoden | 69 |
| 7 | Aufbau des Experiments | 73 |
| 7.1 | Spektroskopie von Rydbergatomen | 75 |
| 7.2 | Supraleitende Mikrowellenresonatoren | 77 |
| 7.3 | Schwingungsgedämpfter ^3He -Kryostat | 82 |
| 8 | Experimentelle Ergebnisse | 85 |
| 8.1 | Ein-Atom-Maser Resonanz | 86 |
| 8.2 | Experimente mit Mikrowellenpulsen | 88 |
| 8.3 | Ein-Atom-Maser mit externer Einstrahlung | 89 |
| 8.3.1 | Variation der Intensität | 90 |
| 8.3.2 | Ein-Atom-Maser Resonanz bei externer Einstrahlung | 93 |
| 8.4 | Messung der Phasendiffusion | 96 |
| 9 | Ausblick | 98 |
| A | Unitäre Transformation der Bewegungsgleichung | 101 |
| B | Fockdarstellung der Ein-Atom-Maser Mastergleichung | 103 |
| C | Emissionswahrscheinlichkeit nach dem Verschieben | 105 |
| D | Atomarer Anteil der Phasendiffusion | 107 |
| | Literaturverzeichnis | 109 |
| | Danksagung | 119 |
| | Lebenslauf | 121 |

Kapitel 1

Einleitung und Überblick

Die Quantenoptik beschreibt Licht (elektromagnetische Strahlung) und dessen Wechselwirkung mit Materie im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenphysik. Dabei stehen insbesondere Phänomene im Vordergrund, die durch die Physik des 19. Jahrhunderts, speziell die klassische Elektrodynamik und Mechanik, nicht erklärt werden können. Erst die Modellvorstellungen der Quantenphysik erlauben eine konsistente physikalische Interpretation dieser Beobachtungen, die oft im Widerspruch zur Intuition stehen.

Die Anfänge der Quantenphysik

Historisch gesehen entwickelte sich die neue Physik aus mehreren fehlgeschlagenen Versuchen, die Schwarzkörperstrahlung richtig zu beschreiben.

Nachdem Gustav Kirchhoff 1859 allein aufgrund thermodynamischer Überlegungen ableiten konnte, daß das Spektrum eines thermischen Strahlers eine universelle Funktion der Temperatur und der Frequenz sein muß, begann daraufhin die Suche nach dem konkreten Zusammenhang. Die Ergebnisse, die von Wilhelm Wien und Lord Rayleigh vor der Jahrhundertwende angegeben wurden, erwiesen sich beide als Näherungen mit begrenztem Gültigkeitsbereich. Während die Wien'sche Strahlungsformel (1896) bei niedrigen Frequenzen fehlschlug, führte das Rayleigh-Jeans-Gesetz bei hohen Frequenzen zu unphysikalischen Vorhersagen. So divergiert beispielsweise die über diese Formel berechnete Gesamtenergie der Schwarzkörperstrahlung („Ultraviolett-Katastrophe“).

Der Durchbruch gelang Max Planck im Jahre 1900 mit seiner zunächst rein empirisch aufgestellten Strahlungsformel, die beide Näherungen als Grenzfälle einschließt und erstmals im perfekten Einklang mit den experimentellen Ergebnissen war. In der darauffolgenden Ableitung mußte er allerdings die ihm unliebsame Annahme machen, daß die „Oszillatoren“ in den Hohlraumwänden nur diskrete Energiestufen annehmen können und als Folge davon das elektromagnetische Feld des Schwarzkörpers ebenfalls nur „quantisierte“ Energiestufen zeigt. Neben dieser Quantenhypothese gab es eine zweite Tatsache, die Planck Sorgen bereitete: Seine Strahlungsformel bedeutete einen klaren Bruch mit der klassischen Physik, da sie im Widerspruch zum Gleichverteilungssatz steht. Trotz dieser anfänglichen Zweifel stand man damals am Anfang einer neuen physikalischen Theorie, die sich im Laufe der folgenden 30 Jahren zu der überaus erfolgreichen Quantenphysik entwickelte.

Weitere Indizien für die Planck'sche Quantenhypothese lieferte Albert Einstein im Jahre 1905 mit seiner Untersuchung zum photoelektrischen Effekt. Dabei postulierte er die Existenz eines Lichtquants, dem er eine Teilchenenergie $E = \hbar\omega$ und einen Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

zuordnete. Er führte also im Gegensatz zu Planck direkt Lichtquanten ein und bemerkte dabei, daß auch die Planck'sche Theorie bereits impliziten Gebrauch davon gemacht habe.

Diese damals merkwürdigen Thesen zur Körnigkeit des Lichts wurden schließlich 1927 von Paul Dirac auf ein solides mathematisches Fundament gestellt. Er führte die korrekte Quantisierung des elektromagnetischen Feldes durch und begründete damit die Quantenelektrodynamik (QED). Danach können die Feldmoden wie in der klassischen Physik mit der Helmholtzgleichung berechnet werden, die Anregung selbiger ist nun aber der Quantisierung unterworfen. Das bedeutet, daß die Energie einer Mode nur ganzzahlig vielfache der Photonenenergie $\hbar\omega$ annehmen kann. Ein weiterer wichtiger Unterschied zur klassischen Physik besteht im Grundzustand. Während in der klassischen Physik eine Mode ohne Amplitude, also mit Energie Null denkbar ist, ist dies im quantenphysikalischen Fall aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation verboten, da dann zwei nichtkommutierende Observablen (E- und B-Feld) einen scharfen Wert besäßen. In der Quantenphysik ist daher der Grundzustand, auch als Vakuumzustand bekannt, durch eine nichtverschwindende Intensitätsfluktuation charakterisiert. Diese Eigenschaft hat insbesondere bei der Atom-Feld-Wechselwirkung entscheidende Konsequenzen.

So konnte die 1947 von W.E. Lamb und R.C. Retherford gemessene Lamb-Shift, d.h. die Aufhebung der Wasserstoff $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ Entartung, im gleichen Jahr von H.A. Bethe mit Hilfe der Vakuumfluktuationen erklärt werden. Ferner konnte 1930 durch die Wigner-Weisskopf-Theorie die Spontanemission eines angeregten Atoms als eine weitere Folge der Kopplung des Atoms an das Vakuumfeld des freien Raumes erkannt werden. Die neue Theorie hatte sich also dabei bestens bewährt.

Spontanemission – intrinsisches Merkmal oder manipulierbar?

Die Wigner-Weisskopf-Theorie erlaubt die Berechnung einer Zeitkonstante γ_f , die den (im Ensemblemittel) exponentiellen Zerfall eines angeregten atomaren Zustands beschreibt. Lange Zeit war der Glaube verbreitet, daß diese Spontanemission eine innere Eigenschaft des Atoms sei und folglich nicht verändert werden kann. Erst die Wigner-Weisskopf-Theorie enthält einen Hinweis darauf, daß der atomare Zerfall von außen beeinflusst werden kann, da expliziter Gebrauch von der Modendichte des freien Raums

$$D_f(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (1.1)$$

gemacht wurde. Betrachtet man ein Atom in einem Gebiet unterschiedlicher Modendichte $D_r(\omega)$, wie zum Beispiel im Inneren eines Resonators, liegt die Vermutung nahe, daß dadurch die Spontanemission mitverändert werden könnte. Tatsächlich stellt sich durch analoge Rechnungen heraus, daß die Lebenszeit $1/\gamma_r$ eines atomaren Übergangs der Frequenz ω um das Verhältnis der Modendichten verschoben wird. Es gilt

$$\gamma_r \simeq \frac{D_r(\omega)}{D_f(\omega)} \gamma_f. \quad (1.2)$$

Die Idee der verstärkten Spontanemission findet man erstmals 1946 in einer Bemerkung von E.M. Purcell [2] und ist Grundbaustein der Resonator-QED, eine Teildisziplin der Quantenoptik.

Resonator-QED

Die Ergebnisse der Resonator-QED können in Regime unterschiedlicher Atom-Feld-Kopplungsstärke aufgeteilt werden. Im Bereich der schwachen Kopplung zusammen mit moderaten Güten des Resonators, zeigt sich nur ein leicht quantitativer Unterschied zum freien Raum. Auch hier erfolgt die Spontanemission in ein kontinuierliches Modenspektrum, das zwar eine etwas unterschiedliche Modendichte aufweist und dementsprechend die Zeitskala des Zerfalls modifiziert, aber dennoch einen irreversiblen Zerfall verursacht. P. Goy *et al.* haben 1983 experimentell zeigen können, daß die Erhöhung der Modendichte zur Verkürzung der atomaren Lebenszeit führt [16]. Dabei regten sie den 23S-Rydbergzustand des Natriumatoms an und liessen es mit einem Resonator hoher Güte wechselwirken. Bei Atom-Feld-Resonanz trat verstärkte Spontanemission auf. Im Gegensatz zu diesem Experiment konnte die Unterdrückung der Spontanemission in dünnen Farbstofffilmen bereits 1974 von K.H. Drexhage *et al.* experimentell bestätigt werden [11].

Eine ganz andere Qualität bekommt die Spontanemission im Falle der starken Kopplung zusammen mit hohen Resonatorgüten. Da die Modenstruktur die einzelnen Resonanzen sehr scharf aus dem Modenkontinuum herauschneidet, bietet sich hier die Rechnung mit diskreten Moden an. Dabei wird man sich auf diejenigen beschränken, die quasiresonant zu einem atomaren Übergang sind. Wird nun ein Atom im angeregten Zustand in eine solche Umgebung gebracht, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder ist ein atomarer Übergang zu einer Feldmode resonant, dann kann ein periodischer Energieaustausch zwischen dem Atom und der Feldmode beobachtet werden, oder keine atomare Übergangsfrequenz paßt zu einer der Feldfrequenzen, dann wird der Spontanzerfall nahezu komplett unterdrückt.

Mit den Ein-Atom-Maser (EAM) Experimenten hat man es tatsächlich geschafft, in diesen Bereich der starken Kopplung vorzudringen.

Neueste Entwicklungen, die die Modifikation der Spontanemission bewußt einsetzen, sind Mikrolaser. Die moderne Halbleitertechnologie ermöglicht dabei die Herstellung optischer Resonatoren mit Maßen unter $1\text{ }\mu\text{m}$. Gerade weil die Spontanemission als Hauptquelle für Energieverluste, Schaltgeschwindigkeits-Limitierung und Laserrauschen gesehen werden kann, erhofft man sich durch die Kontrolle selbiger eine Verbesserung der Lasereigenschaften. „Schwellenlose“ Halbleiterlaser könnten damit realisiert werden [30].

Ein-Atom-Maser – Spielwiese für Experimentatoren und Theoretiker

Wie in Abb.1.1 schematisch dargestellt, wird bei den in dieser Arbeit beschriebenen EAM-Experimenten ein hochkollimierter Rubidium-Atomstrahl in einen supraleitenden Niob-Resonator injiziert. Dabei werden die Atome direkt vor dem Eintritt in den Resonator mittels eines frequenzverdoppelten Farbstofflasers ($\sim 297\text{ nm}$) von dem $5S_{1/2}$ -Grundzustand aus in das $63P_{3/2}$ -Rydbergniveau angeregt. In den zylindrischen Resonatoren, bei denen Güten von $Q > 10^{10}$ erreicht werden können, wechselwirken die Rubidiumatome resonant mit der TE_{121} -Mode, die durch mechanische Deformation auf den Mikrowellen-Dipolübergang nach $61D_{5/2}$ (21.456 GHz) gestimmt wurde (Abb.1.2). Nachdem das Atom den Resonator verlassen hat, wird es durch zustandsselektive Ionisation detektiert.

Da sich aufgrund des geringen atomaren Flusses zu hoher Wahrscheinlichkeit immer nur ein Atom im Resonator aufhält, und die Dynamik deswegen auf die Wechselwirkung eines Atoms mit dem Feld zurückzuführen ist, spricht man auch vom Ein-Atom-Maser (EAM).

Viele Aspekte dieses Modells können analytisch berechnet werden, da die Beschreibung der Dynamik auf dem sogenannten Jaynes-Cummings-Modell basiert, welches bereits 1963

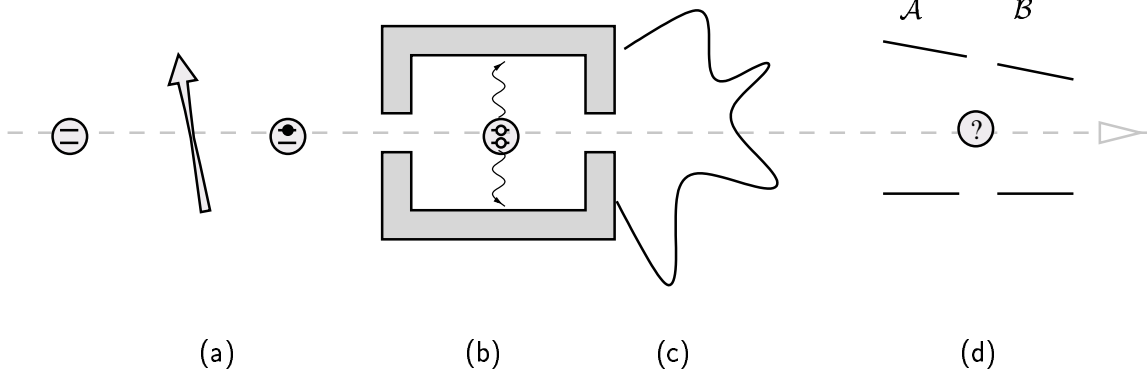


Abbildung 1.1: Schema des Ein-Atom-Masers. In (a) werden die Atome in ein Rydbergniveau angeregt. Die schräge Lasereinstrahlung bewirkt eine geschwindigkeitsselektive Anregung (Dopplereffekt). Im Resonator (b) wechselwirkt das Atom mit der Feldmode. Ein Vorgang, der bei Vernachlässigung der Dämpfung, mit dem Jaynes-Cummings-Modell beschrieben werden kann. Verläßt das Atom den Resonator, so befinden sich Feld und Atom in einem verschränkten Zustand (c), der durch die zustandsselektive Messung zerstört wird. Die weiter auseinanderliegenden Ionisationsplatten von A symbolisieren eine geringere Feldstärke, d.h. $|a\rangle$ wird ionisiert, $|b\rangle$ nicht (d).

von E.T. Jaynes *et al.* [36] gelöst wurde. Es modelliert die vollständig quantenmechanische Wechselwirkung zweier elektronischer Niveaus eines einzelnen Atoms mit einer einzelnen quasiresonanten Mode des elektromagnetischen Strahlungsfeldes.

Bis heute beschäftigen sich viele theoretische Arbeiten in der Quantenoptik mit diesem fundamentalen Modell und dem darauf aufbauenden EAM. Beispielsweise gibt es Vorschläge zur Erzeugung nichtklassischer Zustände, die in Abschnitt 2.6 dieser Arbeit beschrieben werden, sowie deren Rekonstruktion über die im Experiment zugängliche Atomstatistik [107–109, 117, 133, 136, 137]. Ferner gibt es einen Vorschlag von M. Löffler *et al.* [66] wie man mit Hilfe des EAM-Experimentes die Nichtlokalität des Atom-Feld-Zustands nach der Wechselwirkung in Form einer Bell'schen Ungleichung quantifizieren kann. Seit neuestem fokussiert sich das Interesse auf die Berücksichtigung der Bewegungsquantisierung von Atomen im EAM, der in diesem Zusammenhang wegen der quantisierten z-Ortsachse auch als *Maser* bezeichnet wird [78–85].

Auf der experimentellen Seite zeigten bereits 1985 D. Meschede *et al.* [48], daß eine Realisierung im Labor mit vertretbarem Aufwand möglich ist und sich damit die theoretischen Vorhersagen auch im Experiment verifizieren lassen. Tatsächlich konnten darauffolgend weitere quantenmechanische Phänomene wie Revivals [51, 68], sub-poissonsche Photonenzahlverteilungen [57, 70, 74, 77] und Interferenz zwischen *Dressed-States* [62, 70] gemessen werden.

Gliederung der Arbeit

Im einleitenden Theoriekapitel 2 werden die Grundzüge der EAM-Theorie zusammengefaßt. Da die in dieser Arbeit entwickelten Meßmethoden stets auf der Ankopplung eines externen Mikrowellenfeldes an die Resonatormode basieren, muß die einfache Jaynes-Cummings-Dynamik in Kapitel 3 auf diesen Fall ausgedehnt werden. Insbesondere wird dort die Möglichkeit einer Feldzustandsverschiebung im Phasenraum und die Präparation eines Phasen-Mikromaserzustands diskutiert. Daneben findet man noch einige Tricks zur mathematischen Beschreibung des Atom-Feld-Systems bei gleichzeitiger Mikrowelleneinstrahlung.

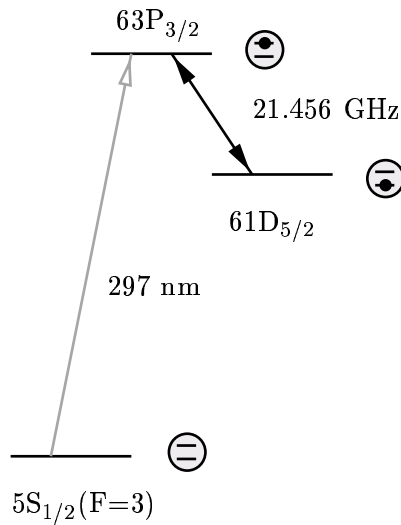


Abbildung 1.2: Vereinfachtes Termschema von ^{85}Rb . Vor der Wechselwirkung mit dem Resonator wird das Atom mittels UV-Laseranregung direkt vom Grundzustand in das $63P_{3/2}$ -Rydberg-Niveau angeregt (wird in den Rechnungen als Ket-Vektor $|a\rangle$ bezeichnet). Der Resonator ist auf die Differenzfrequenz zum tiefer liegenden $61D_{5/2}$ -Rydberg Zustand $|b\rangle$ gestimmt.

Auf eine vollständige Darstellung dieser vielfältigen Materie wird jedoch verzichtet und statt dessen das Augenmerk auf Phänomene gerichtet, die für die Erklärung der experimentellen Ergebnisse wichtig sein werden.

Ferner haben die Meßergebnisse gezeigt, daß gerade im Zusammenhang mit höher angeregten Feldmoden, die diabatische Näherung bei der Atom-Feld-Wechselwirkung nicht mehr sinnvoll angewendet werden kann. Gründe dafür findet man in Kapitel 4.

Bevor dann in Kapitel 6 die beiden neuen Methoden zur Messung der Phasendiffusion bzw. Linienbreite der EAM-Strahlung präsentiert werden, führt das Kapitel 5 in die Besonderheiten des EAM-Spektrums ein. Außerdem wird die numerisch berechnete EAM-Linienbreite mit einem semiklassischen Ausdruck verglichen, der die physikalischen Ursachen der Phasendiffusion beim EAM klar offenlegt.

Ab Kapitel 7 beginnt dann der experimentelle Teil der Arbeit. Dort werden zunächst die wichtigsten Komponenten des Experiments beschrieben. Im Fokus stehen dabei der neue schwingungsgedämpfte EAM-Aufbau und eine detaillierte Beschreibung der Fertigung und Planung supraleitender Nb-Resonatoren.

Schließlich präsentiert Kapitel 8 die Meßergebnisse, die im Hinblick auf die Phasendifusionsmessung durchgeführt werden konnten.

Kapitel 2

Theorie des Ein-Atom-Masers

Die Theorie des EAM geht auf die Arbeit von P. Filipowicz *et al.* [49] aus dem Jahre 1986 zurück. Darin wurde zum ersten Mal die EAM-Mastergleichung für die Dynamik der Felddichtematrix aufgestellt und für stationäre Verhältnisse gelöst. Sie enthält folgende Annahmen und Bestandteile:

- Einzelne Atome wechselwirken mit einer einzelnen Resonatormode.
- Das Atom wird als quantenmechanisches Zwei-Niveau-System betrachtet, das durch die fermionischen „spin-flip“-Operatoren c, c^\dagger beschrieben wird. Die Ortskoordinate des Schwerpunkts wird als klassische Variable angenommen, d.h. nicht quantisiert.
- Die Resonatormode wird ebenfalls quantenmechanisch, durch die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a, a^\dagger beschrieben.
- Die Dynamik des EAM-Feldes lässt sich in zwei voneinander getrennte Phasen aufteilen:
 - **Pumpphase** - Unter Vernachlässigung jeglicher Dämpfung wechselwirkt ein Atom mit der Resonatormode und kann diesem ein Mikrowellenphoton hinzufügen.
 - **Dämpfungsphase** - Zwischen zwei atomaren Pumpphasen relaxiert das Feld in Richtung eines thermischen Zustands. Die zeitliche Länge der Dämpfungsphase sei *poisson-verteilt*.

Aufgrund seiner zentralen Rolle wird dieses Modell zu Beginn dieses Kapitels nochmal skizziert.

2.1 Jaynes-Cummings-Modell

Um all die facettenreichen Erscheinungen in der EAM-Dynamik verstehen zu können, müssen sowohl die elektronischen Freiheitsgrade des Atoms, als auch die Amplitude der Resonatormode quantisiert werden. Die Pumpphase des EAMs wird also durch die unitäre Zeitentwicklung beschrieben, die der dreiteilige Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{AF} \quad (2.1)$$

erzeugt. Mit den Bestandteilen \mathcal{H}_A und \mathcal{H}_F , die Hamiltonoperatoren des Atoms und des Feldes ohne Wechselwirkung, und dem Wechselwirkungsoperator \mathcal{H}_{AF} .

Der Hamiltonoperator des ungestörten Atoms - \mathcal{H}_A

Im Hinblick auf die quasisresonante Wechselwirkung des Atoms mit dem EM-Feld, kann man die Eigenzustände von \mathcal{H}_A auf diejenigen zwei beschränken, deren Übergangsfrequenz der Modenfrequenz am nächsten kommt. Alle anderen Zustände werden aufgrund der großen Atom-Feld-Verstimmung fast nicht beeinflusst und können vernachlässigt werden. Der reduzierte Hilbertraum besteht dann aus den Zuständen $|a\rangle, |b\rangle$ mit den Eigenwertgleichungen

$$\mathcal{H}_A|i\rangle = E_i|i\rangle \quad i = a, b; \quad E_a > E_b. \quad (2.2)$$

Wird der Energienullpunkt in die Mitte von E_a und E_b gelegt, kann der Hamiltonoperator als

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_z = \frac{1}{2}\hbar\omega_A(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|) \quad (2.3)$$

geschrieben werden. Hierbei wurde die Pauli-Matrix σ_z verwendet, die über die Kommutatorbeziehung $[c, c^\dagger] = \sigma_z$ mit den häufig verwendeten „spin-flip“-Operatoren c, c^\dagger verknüpft ist.

Für die „spin-flip“-Operatoren (atomare Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren) gilt die Antikommutatorbeziehung

$$[c, c^\dagger]_+ = 1. \quad (2.4)$$

Diese Operatoren stellen für den hier eingeführten 2-dimensionalen Hilbertraum ein vollständiges System dar, d.h. jede atomare Observable kann eindeutig in c und c^\dagger entwickelt werden. So ergibt sich beispielsweise für den Ortsoperator des Elektrons, der die Elektronenposition relativ zum Atomkern mißt,

$$\mathbf{r} = \langle a|\mathbf{r}|b\rangle(c + c^\dagger). \quad (2.5)$$

Es wurde angenommen, daß die beiden elektronischen Zustände kein permanentes Dipolmoment besitzen und das Übergangsmatrixelement $\langle a|\mathbf{r}|b\rangle$ reell gewählt werden kann, was bei geeigneter Wahl der Quantisierungachse stets möglich ist.

Der Hamiltonoperator des EM-Feldes - \mathcal{H}_F

Wie in der QED im Rahmen der 2.Quantisierung gezeigt wird [7], kann eine Mode des EM-Feldes analog zur Behandlung des mechanischen harmonischen Oszillators quantisiert werden. Somit kann die Feldenergie über die entsprechenden *Leiteroperatoren* a, a^\dagger in Quantenstufen von $\hbar\omega_F$ verändert werden.

Wie beim harmonischen Oszillator werden die stationären Zustände, auch *Fockzustände* genannt, mit ganzen Zahlen von $n \geq 0$ durchnummeriert und erfüllen die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{H}_F|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (2.6)$$

Bei Vernachlässigung der Nullpunktenergie $1/2\hbar\omega_F$ lautet der Hamiltonoperator

$$\mathcal{H}_F = \hbar\omega_F a^\dagger a \quad (2.7)$$

mit der Bosevertauschungsrelation

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.8)$$

für die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Der Operator der elektrischen Feldstärke kann nun mit Hilfe dieser Leiteroperatoren als¹

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R})}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0 (a + a^\dagger) \quad (2.9)$$

geschrieben werden, wobei die sogenannte elektrische Feldstärke pro Photon [10]

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_F}{\epsilon_0 V_C}} \quad (2.10)$$

und die auf das Resonatorvolumen V_C normierte Modenfunktion $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ eingeführt wurde. Die Modenfunktion ist Lösung der klassischen Helmholtzgleichung in Verbindung mit der gegebenen Resonatorgeometrie als Randbedingung.

Der Wechselwirkungsoperator - \mathcal{H}_{AF}

Um nun das Atom in Wechselwirkung mit dem EM-Feld als quantenmechanische Gesamtheit beschreiben zu können, muß man als vollständiges System möglicher Zustände den Produkt-Hilbertraum aus Atom- und Feldzuständen verwenden:

$$|n\rangle \otimes |i\rangle \equiv |n, i\rangle \quad n \in \mathbb{N}_0 ; i = a, b \quad (2.11)$$

In der EAM-Theorie kann die Wechselwirkungsenergie in Dipolnäherung berechnet werden. Die dafür nötige Bedingung eines auf atomarem Maßstab örtlich quasikonstanten EM-Feldes ist selbst bei den verwendeten *aufgeblähten* Rydbergatomen (Bohrscher Radius $\approx 0.5 \mu\text{m}$) in Verbindung mit cm-Wellen sehr gut erfüllt. Die Quantisierung erfordert das Ersetzen der klassischen Variablen durch die entsprechenden oben eingeführten Operatoren und führt direkt zu dem wohlbekannten *Jaynes-Cummings-Wechselwirkungsoperator* [36]²:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{AF} &= -e\mathbf{r}\mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ &= \hbar g(\mathbf{R})(c + c^\dagger)(a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (2.12)$$

mit der Koppelkonstante

$$g(\mathbf{R}) = -\frac{\wp \mathcal{E}_0}{\hbar} \cdot \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R})}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

und dem Dipolmatrixelement

$$\wp = e\langle a | \mathbf{r} | b \rangle. \quad (2.14)$$

Man beachte die zwei verschiedenen Ortsvektoren der Elektronenposition \mathbf{r} relativ zum Atomkern (wird als identisch mit dem Massen-Schwerpunkt angenommen) und der Atomkernposition \mathbf{R} innerhalb des Resonators.

Die Terme ca und $c^\dagger a^\dagger$ im Hamiltonoperator aus Gln. 2.12 können unter der Bedingung $g(\mathbf{R}), |\omega_F - \omega_A| \ll \omega_A, \omega_F$ vernachlässigt werden (Rotating-Wave-Näherung oder Drehwellennäherung). Man erhält zusammenfassend den Hamiltonoperator des Gesamtsystems

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_F a^\dagger a + \hbar\omega_A c^\dagger c + \hbar g(\mathbf{R})(ac^\dagger + a^\dagger c). \quad (2.15)$$

¹In der Literatur findet man anstatt $\mathbf{E} \sim (a + a^\dagger)$ auch $\mathbf{E} \sim i(a - a^\dagger)$; beide Ausdrücke lassen sich jedoch bei geeigneter Transformation $(a, a^\dagger) \rightarrow (\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$ ineinander überführen.

²Anstatt der hier verwendeten $\mathbf{r}\mathbf{E}$ -Kopplung kann auch die *minimale* Kopplung in Form von $\mathbf{p}\mathbf{A}$ angesetzt werden. Eine Diskussion dieser Möglichkeiten findet man bei W. E. Lamb [40]. $e = -|e|$, elektrische Ladung des Elektrons.

Atom-Feld-Dynamik

Als Grundpfeiler des Pumpprozesses erfordert die EAM-Theorie die analytische Bestimmung der Dynamik des verschränkten Atom-Feld-Systems. Eine Aufgabe, die besonders leicht in der Basis der Eigenzustände von \mathcal{H} gelöst werden kann. Aufgrund der Tatsache, daß diese Zustände elektronische stationäre Zustände darstellen, die mit dem elektromagnetischen Feld *verwoben* sind, werden sie auch bildlich als *Dressed-States* bezeichnet und sollen hier kurz eingeführt werden.

Es ist offensichtlich, daß die oben eingeführte Basis $|n, i\rangle$ des durch Atom- und Feldzustände aufgespannten Hilbertraums nicht die richtige Wahl sein kann, da die Zustände $|a, n\rangle$ und $|b, n+1\rangle$ von den entsprechenden Grundprozessen in \mathcal{H}_{AF} , die Emission eines Atoms in die Feldmode ($a^\dagger c$) beziehungsweise die Absorption eines Feldphotons durch das Atom (ac^\dagger), erfaßt und verändert werden. Allerdings stellt man fest, daß diese beiden Zustände ein dynamisch abgeschlossenes Paar darstellen, weil sie in der zeitlichen Entwicklung ausschließlich in den jeweiligen anderen Zustand übergehen können.

Deswegen ist es naheliegend zur Bestimmung der *Dressed-States* eine sich im Nachhinein sinnvoll entlarvende Überlagerung aus den Zuständen $|a, n\rangle$ und $|b, n+1\rangle$ anzusetzen:

$$\begin{aligned} |n+\rangle &= \cos \theta_n |b, n+1\rangle + \sin \theta_n |a, n\rangle \\ |n-\rangle &= -\sin \theta_n |b, n+1\rangle + \cos \theta_n |a, n\rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

Der Grundzustand $|0, b\rangle$ bildet eine Ausnahme, da er im gekoppelten und im ungekoppelten Fall Eigenzustand zum entsprechenden Hamiltonoperator ist. Da hier stets der atomare Zustand $|a\rangle$ als Anfangszustand gewählt wird, spielt dieser Grundzustand keine Rolle und wird im Folgenden weggelassen.

Zur Bestimmung der Koeffizienten setzt man obigen Ansatz in die Eigenwertgleichung des gesamten Hamiltonoperators

$$\mathcal{H}|n\pm\rangle = E_{n\pm}|n\pm\rangle \quad (2.17)$$

ein und erhält

$$\begin{aligned} \sin \theta_n &= \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n - \delta_{\text{AF}})^2 + \Omega_n^2}} \quad ; \quad \sin 2\theta_n = \frac{\Omega_n}{\Delta_n} \\ \cos \theta_n &= \frac{\Delta_n - \delta_{\text{AF}}}{\sqrt{(\Delta_n - \delta_{\text{AF}})^2 + \Omega_n^2}} \quad ; \quad \cos 2\theta_n = -\frac{\delta_{\text{AF}}}{\Delta_n}. \end{aligned}$$

Dabei wurden die beiden sogenannten Rabifrequenzen Δ_n, Ω_n eingeführt, die, wie sich im nächsten Abschnitt herausstellen wird, die Kreisfrequenz des Atom-Feld-Energieaustausches beinhalten, und die Atom-Feld-Verstimmung δ_{AF} . Es gilt

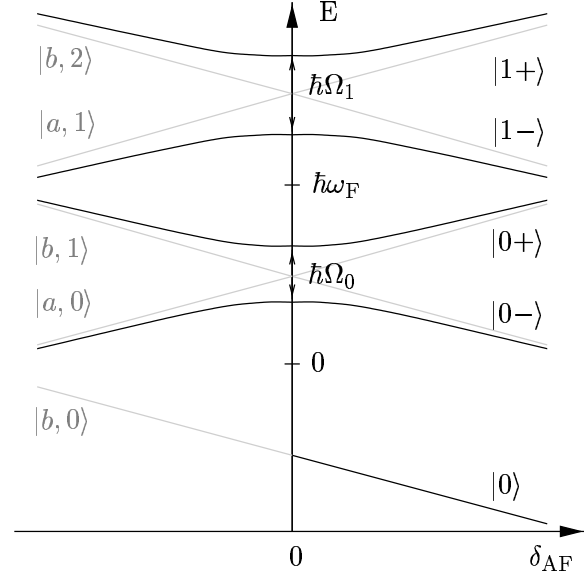
$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sqrt{\delta_{\text{AF}}^2 + \Omega_n^2} \\ \Omega_n &= 2g\sqrt{n+1} \\ \delta_{\text{AF}} &= \omega_A - \omega_F. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Eigenwerte bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} E_{n\pm} &= \frac{\hbar}{2} ((2n+1)\omega_F \pm \Delta_n) \\ E_0 &= -\frac{\hbar}{2}(\omega_F + \delta_{\text{AF}}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Abbildung 2.1: Die Atom-Feld Gesamtenergie des gekoppelten und ungekoppelten ($g=0$) Systems, aufgetragen als Funktion der Verstimmung δ_{AF} . Der Verlauf der Dressed-States-Energien ist durch das „avoided crossing“ bei Resonanz charakterisiert. Die Aufspaltung beträgt dort Ω_n und vergrößert sich mit Verstimmung auf Δ_n .

Die Zustände $|0\rangle$ und $|b, 0\rangle$ sind identisch, da sie zu den Hamiltonoperatoren des gekoppelten und ungekoppelten Problems Eigenzustände sind.



und sind in Abb. 2.1 als Funktion der Verstimmung dargestellt.

Nachdem nun die stationären Zustände bestimmt wurden, kann man jetzt in dieser Basis den nichtstationären Fall des oszillatorischen Energieaustausches zwischen Atom und Feld untersuchen.

Als Anfangszustand werden die Zustände

$$\begin{aligned} |\psi_a(0)\rangle &= |a, n\rangle \\ |\psi_b(0)\rangle &= |b, n+1\rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

angenommen. Aus diesen beiden Zuständen kann man sich durch Superposition jeden beliebigen Anfangszustand zusammenbauen. Zur Berechnung der Zeitentwicklung transformiert man zunächst diese Zustände in die *Dressed-States*-Basis, in der die Zeitentwicklung einfach als Multiplikation mit dem Phasenfaktor $\exp\{-i/\hbar E_{n\pm} t\}$ gegeben ist. Die Rücktransformation in die $|a, n\rangle, |b, n+1\rangle$ -Basis ergibt

$$\begin{aligned} |\psi_a(t)\rangle &= C_n(t)|a, n\rangle + S_n(t)|b, n+1\rangle \\ |\psi_b(t)\rangle &= S_{n-1}(t)|a, n\rangle + C_{n-1}^*(t)|b, n+1\rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \cos\left(\frac{\Delta_n t}{2}\right) - i \frac{\delta_{AF}}{\Delta_n} \sin\left(\frac{\Delta_n t}{2}\right) \\ S_n(t) &= -i \frac{\Omega_n}{\Delta_n} \sin\left(\frac{\Delta_n t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für den Fall, daß das Atom im angeregten Zustand $|a\rangle$ plötzlich in das Resonatorfeld $|n\rangle$ gebracht wird, gilt für die Wahrscheinlichkeit das Atom nach der Zeit t im Grundzustand vorzufinden

$$p_b(t) = \sin^2 2\theta_n \sin^2 \frac{\Delta_n t}{2}. \quad (2.23)$$

Im Resonanzfall ($\sin 2\theta_n \rightarrow 1, \Delta_n \rightarrow \Omega_n$) hat das Atom zur Zeit $t_\pi = \pi/\Omega_n$ seine Energie an das Feld mit Wahrscheinlichkeit 1 abgegeben. Nach einer weiteren Zeit t_π ist der Anfangszustand wiederhergestellt. Die Energie oszilliert also mit der Frequenz Ω_n zwischen Atom und Feld. Ω_n wird als n-Photonen Rabifrequenz bezeichnet. Im Falle zunehmender Verstimmung erhöht sich die Rabifrequenz auf Δ_n und die maximale Wahrscheinlichkeit $p_b(\pi/\Delta_n)$ sinkt.

2.2 Semiklassische Atomdynamik

In der semiklassischen Beschreibung wird die Quantisierung des Atoms als Zwei-Niveau-System beibehalten, das Strahlungsfeld jedoch durch eine E-Feld Amplitude f_0 klassisch behandelt [22]. Dieses Modell liefert als Energieaustauschfrequenz die semiklassische Rabifrequenz $\varphi f_0/\hbar$, die allerdings in diesem Abschnitt mit der Bezeichnung $2g\sqrt{\langle n \rangle + 1}$ (Rabifrequenz bei mittlerer Photonenzahl $\langle n \rangle$) aus dem Jaynes-Cummings-Modell gleichgesetzt wird.

Wird der atomare Zustand nun durch die Dichtematrix ρ_A beschrieben, kann seine Dynamik als Präzessionsbewegung in einem 3-dimensionalen Raum geometrisch veranschaulicht werden [35]. Die Komponenten des Zustandsvektors (=Blochvektor) stellen sich als die Inversion des Zwei-Niveau-Systems ($\vec{e}_z \langle \sigma_z \rangle$) und die Polarisierung der Dipolschwingung ($\vec{e}_{x/y} \langle \sigma_{x/y} \rangle$) heraus.

Die Bewegungsgleichung kann nun kompakt mit Hilfe der Paulimatrizen (z.B. [8]) geschrieben werden als (mitrotierendes Bezugssystem)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \vec{\sigma} \rangle &= - \langle \vec{\sigma} \rangle \times \vec{\Delta} \\ \vec{\Delta} &= \delta_{AF} \vec{e}_z + 2g\sqrt{\langle n \rangle + 1} \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mit den Mittelwerten für die atomaren Meßgrößen

$$\langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}_A \left(\rho_A \sigma_i \right) \quad (2.25)$$

und

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \rho_{ab} + \rho_{ba} = 2 \text{Re}\{\rho_{ab}\} \\ \langle \sigma_y \rangle &= i(\rho_{ab} - \rho_{ba}) = 2 \text{Im}\{\rho_{ab}\} \\ \langle \sigma_z \rangle &= \rho_{aa} - \rho_{bb}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

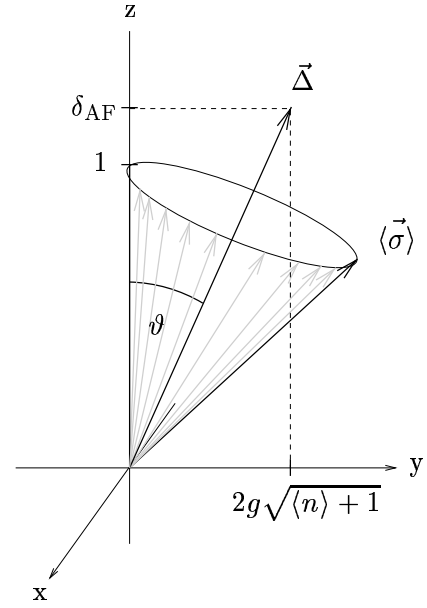
Obige Gleichungen definieren das in der Literatur unter dem Namen *Blochbild* bekannte Modell, das die atomare Dynamik als Präzessionsbewegung um den Vektor $\vec{\Delta}$ in einem abstrakten Raum (definiert durch die Koordinaten des *Blochvektors* $\langle \sigma_i \rangle$) darstellt (siehe Abb 2.2). Die semiklassische Rabifrequenz ist durch den Betrag von $\vec{\Delta}$ gegeben

$$\Delta = |\vec{\Delta}| = \sqrt{\delta_{AF}^2 + 4g^2(\langle n \rangle + 1)}. \quad (2.27)$$

Abbildung 2.2: *Semiklassische Atom-Feld-Wechselwirkung im Blochbild. Die Dichtematrix des atomaren Zwei-Niveau-Systems kann eindeutig durch einen Punkt in der „Blochkugel“ mit Radius 1 angegeben werden. Die Projektion auf die z-Achse gibt dann die Inversion des Systems an (Besetzungswahrscheinlichkeit für oberen Zustand minus unteren Zustand), die Projektion in die x-y-Ebene bestimmt die Polarisation des atomaren Dipols (Real- und Imaginärteil der Dichtematrixnebendiagonale).*

Als Anfangszustand wurde das Atom im oberen Zustand angenommen ($z=1$). Der Vektor $\vec{\Delta}$ wird durch seine Komponenten, die resonante Rabi-Frequenz $2g\sqrt{\langle n \rangle + 1}$ und die Atom-Feld-Verstimmung δ_{AF} , definiert und schließt einen Winkel ϑ zur z-Achse ein. Die Zeitentwicklung des atomaren Systems ist dann als Präzession des Blochvektors um $\vec{\Delta}$ gegeben. Diese Art der Dynamik setzt voraus, daß die Wechselwirkung instantan eingesetzt hat. Je langsamer jedoch die Feldstärke von Null auf ihren Endwert erhöht wird, desto mehr neigt der Blochvektor dazu an $\vec{\Delta}$ kleben zu bleiben und die Dynamik wird adiabatischer.

Für den adiabatischen Grenzfall zeigt der Blochvektor während der gesamten Zeitentwicklung in die Richtung $\pm\vec{\Delta}$, was bei der quantenmechanischen Beschreibung einem Dressed-State entsprechen würde.



2.3 Dämpfung des Resonatorfeldes

Die im Abschnitt 2.1 beschriebene Atom-Feld-Dynamik konnte durch eine quantenmechanische unitäre Zeitentwicklung einer gegebenen Wellenfunktion beschrieben werden. Insbesondere erlaubt die EAM-Theorie während der Pumpphase eine dämpfungsfreie Beschreibung. Sowohl der atomare Zerfall in nichtaktive Niveaus, als auch die Feldmodendämpfung werden auf dieser Zeitskala vernachlässigt.

Im Gegensatz dazu muß die Felddämpfung in der Zeit zwischen zwei Pumpphasen berücksichtigt werden. Aufgrund der Tatsache, daß es sich hier um eine irreversible Dynamik handelt, kann die Felddynamik nicht mehr durch eine unitäre Transformation beschrieben werden, da dies stets die Kompatibilität bezüglich Zeitumkehr einschließt. Vielmehr muß eine Beschreibung gewählt werden, die alle möglichen Feldzustände in einer charakteristischen Zeit $\Gamma^{-1} = t_{cav}$ - der *Photonenlebensdauer* - in den thermischen Zustand mit mittlerer Photonenzahl

$$n_{th} = \left[\exp \left(\frac{\hbar\omega_F}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (2.28)$$

relaxieren läßt. Bekanntlich ist der thermische Zustand kein reiner Zustand mehr, sondern ein Gemisch von Fockzuständen und muß daher in Form einer Dichtematrix ρ angegeben werden.

Die mathematische Beschreibung erfolgt hier über die Mastergleichung eines an ein thermisches Bad gekoppelten harmonischen Oszillators [8, 28]

$$\dot{\rho} = -\frac{\Gamma}{2}(n_{th} + 1) \left[a^\dagger a \rho - 2a \rho a^\dagger + \rho a^\dagger a \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Gamma}{2}n_{th} \left[aa^\dagger \rho - 2a^\dagger \rho a + \rho aa^\dagger \right] \\
& = \mathcal{L}\rho.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

2.4 Mastergleichung

Die unterschiedlichen Zeitskalen erlauben die Vernachlässigung der Dämpfung während der Wechselwirkungszeit eines Atoms. Somit kann die Zeitentwicklung des EAM-Feldes in eine dämpfungsfreie Pumpphase (ein Atom durchquert den Resonator) und eine Relaxationsphase (kein Atom im Resonator, Mode wird gedämpft) unterteilt werden.

Nachdem das Atom im oberen Zustand $|a\rangle$ in den Resonator injiziert wurde, soll das Atom-Feld-System nach der unitären Zeitentwicklung des Jaynes-Cummings-Modells beschrieben werden. Es wird angenommen, daß das Atom mit möglicher Verstimmung δ_{AF} ein Zeit τ wechselwirkt und daß die Koppelkonstante wegen der Diabatizität durch einen Effektivwert

$$\bar{g} = \tau^{-1} \int_0^\tau dt' g(t') \tag{2.30}$$

ersetzt werden kann. Nach dem Verlassen des Resonators befindet sich das Gesamtsystem i.a. in einem verschränkten Zustand (*Entangled-State*). Der Gesamtzustand läßt sich also nicht mehr als Produktzustand von Atom- und Feldzuständen ausdrücken, was sowohl klassische als auch quantenmechanische Korrelationen zur Folge hat [72]. Mißt der Detektor den Zustand $|a\rangle$, so soll der reduzierte Dichteoperator des Feldes mit

$$\frac{\mathcal{A}}{\langle \mathcal{A} \rangle} \rho \tag{2.31}$$

bezeichnet werden. Analog dazu die Definition von \mathcal{B} für die Messung von $|b\rangle$.

Da hier keine individuelle, sondern eine stationäre Lösung im Sinne eines Ensemblemittelwertes gesucht wird, kann die Dichtematrix nach der Wechselwirkung eines Atoms über die möglichen Meßwerte gemittelt werden. Bei Detektoreffizienz $\eta = 1$ ergibt sich eine Änderung pro Atom

$$\delta\rho = (\mathcal{A} + \mathcal{B} - 1)\rho. \tag{2.32}$$

Die Meßoperatoren können direkt aus dem Jaynes-Cummings-Modell im Wechselwirkungsbild mit Hilfe von Gln. 2.21 abgeleitet werden. Ausgehend von den Komponenten der Dichtematrix in Fockdarstellung nach der Spurbildung

$$\rho_{n,m} \xrightarrow{\tau} C_n(\tau)C_m^*(\tau) \rho_{n,m} + S_{n-1}(\tau)S_{m-1}^*(\tau) \rho_{n-1,m-1}, \tag{2.33}$$

erhält man schnell, wie in Anhang B zusammengefaßt, die expliziten Darstellungen von \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Liegt ein poissonscher Atomstrahl vor (Ankunftszeiten der Atome sind unabhängige Ereignisse), und stellt man sich den Pumpvorgang als über die Zeit *verschmiert* vor, so kann die Differenz in Gln. 2.32 als Differential geschrieben und mit der Flußrate r gewichtet werden.

Für den Gesamtprozeß läßt sich die differentielle Änderung der Felddichtematrix ρ als Summe der Dämpfungs- und Meßoperatoren ausdrücken [61]

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= (\mathcal{L} + r(\mathcal{A} + \mathcal{B} - 1)) \rho \\ &= \mathcal{M}\rho.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Diese Mastergleichung wurde erstmals 1986 von P. Filipowicz *et al.* [49] abgeleitet, kurz darauf von L.A. Lugiato *et al.* [52].

2.5 Stationäre Photonenstatistik

Betrachtet man die Mastergleichung B.7 mit ihren expliziten Operatoren, erkennt man, daß in Fockdarstellung die Feldmatrixelemente (n, m) nur über ihre diagonalen Nachbarn $(n + 1, m + 1)$ und $(n - 1, m - 1)$ gekoppelt sind. Man kann also jeder Diagonalen eine von den anderen entkoppelte Bewegungsgleichung zuordnen. Bei einer anfangs diagonalen Dichtematrix, kann man sich deshalb auf die Diagonalelemente beschränken. Der stationäre diagonale Dichteoperator wird im Folgenden als $\rho^{(SS)}$ bezeichnet. Er erfüllt die Gleichung

$$(\mathcal{L} + r(\mathcal{A} + \mathcal{B} - 1)) \rho^{(SS)} = 0.\tag{2.35}$$

In Fockdarstellung kann man diese Gleichung als Ratengleichung für die Feldenergieniveaus interpretieren. Bezogen auf ein Niveau gibt sie den Wahrscheinlichkeitsfluß für die Be- und Entvölkerung an. Die Forderung, daß im stationären Zustand der Nettostrom für jedes Niveau verschwinden muß – *detailed balance - Bedingung* –, führt unmittelbar auf eine Rekursionsgleichung für die Diagonalelemente $\langle n | \rho^{(SS)} | n \rangle \equiv \rho^{(SS)}(n)$. Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun den expliziten Ausdruck für den Dichteoperator des EAM-Feldes angeben:

$$\rho^{(SS)}(a^\dagger a) = \rho^{(SS)}(0) \left(\frac{n_{th}}{n_{th} + 1} \right)^{a^\dagger a} \prod_{m=1}^{a^\dagger a} \left(1 + \frac{N_{ex}}{n_{th} m} |S_{m-1}|^2 \right)\tag{2.36}$$

Der Wert $\rho^{(SS)}(0)$ (=Null-Photonen-Wahrscheinlichkeit) bestimmt sich aus der Normierungsbedingung. Die Photonenstatistik des Feldes $\langle n | \rho | n \rangle$ erhält man in diesem Fall durch Austauschen des Photonenzahloperators $a^\dagger a$ durch n .

Die Photonenstatistik als Funktion des Pumpparameters

Der Pumpparameter wird beim EAM üblicherweise als

$$\theta = g\tau \sqrt{N_{ex}}\tag{2.37}$$

definiert. Diese Definition ist sinnvoll, da die Struktur der Funktion $\langle n \rangle(\theta)$ weitgehend unabhängig von speziellen N_{ex} -Werten ist. So beginnt die mittlere Photonenzahl ab dem Schwellwert $\theta \simeq 1$ stark anzusteigen (Abb. 2.3). Das Maximum dieser Entwicklung ist sicher dann erreicht, wenn sich der atomare Blochvektor um π gedreht hat, fast jedes Atom also seine Energie in der Feldmode deponiert. Mit der Bedingung $2g\tau \sqrt{N_{ex}} = \pi$ für diesen Prozeß, erhält man $\theta = \pi/2$. Erhöht man den Pumpparameter noch weiter, sinkt die mittlere

Photonenzahl wieder, weil der Rabiwinkel größer π wird und deswegen die Emissionswahrscheinlichkeit abnimmt – eine direkte Konsequenz der vollständig kohärenten Wechselwirkung der Atome. Signifikant im weiteren Verlauf sind die scharfen Zacken bei $\theta \simeq n2\pi$. In diesem Bereich bildet sich bei höheren Photonenzahlen ein weiteres lokales Maximum aus. Eine anschauliche Erklärung findet man z.B. im Rahmen einer semiklassischen Betrachtung in [55, 56]. Wie experimentell von O. Benson *et al.* [60] gezeigt werden konnte, ist dieser Bereich bistabil, d.h. die EAM-Intensität springt zwischen den beiden Maxima hin und her. Es wurden Zeitkonstanten bis zu 10 min. gemessen.

2.6 Erzeugung nichtklassischer Zustände

2.6.1 Nichtklassische Photonenzustatistik – Sub-Poisson-Bereich

In der Abbildung der Photonenzustatistik (Abb. 2.4) fällt für $\theta > \pi/2$ eine zunehmende Verschmälerung der Photonenzustatistik auf. Will man dieses Verhalten quantifizieren, kann man als Maß der Abweichung von der Poissonstatistik den von Mandel 1979 eingeführten Q -Parameter angeben [13]:

$$Q = \frac{\Delta n^2}{\langle n \rangle} - 1. \quad (2.38)$$

$\Delta n^2 \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ bezeichnet dabei die Varianz der Photonenzustatistik.

Der so definierte Q -Wert ist negativ (positiv) für eine sub- (super-) Poissonverteilung und gleich Null für die Poissonverteilung. Das untere Limit -1 wird von der schmalsten Photonenzustatistik – dem Fockzustand – erreicht.

Wie ist es nun möglich, daß das durch Pump- und Dissipationsprozesse vorgegebene Rauschen im EAM reduziert wird? Zunächst erzeugt ein rückkopplungsfreier Pumpmechanismus, wie er im *normalen* Maser vorliegt, eine Poissonstatistik. Dort ist die Photonengewinnrate pro Γ^{-1} gleich $N_{ex}/2$, also unabhängig von der aktuellen Photonenzahl. Anders ist die Situation im Subpoissonbereich des EAMs. Führen hier Fluktuationen zu kurzfristig höheren Pumpparametern, so wirkt eine Verringerung der Emissionswahrscheinlichkeit diesem Trend entgegen. Es sind also zwei Eigenschaften des EAM, die eine Rauschreduzierung bewirken:

- Feste kohärente Wechselwirkungszeit für alle Atome
- Negative Steigung der Pumpkurve (Konsequenz der ersten Bedingung)

2.6.2 Fangzustände

Ein weiterer interessanter Effekt im Verhalten der Photonenzustatistik tritt bei sehr tiefen Temperaturen auf ($n_{th} < \sim 10^{-4}$). Unter anderen haben P. Meystre *et al.* [53] darauf hingewiesen, daß im EAM Feldzustände entstehen können, deren Photonenzahl einen gewissen Wert nicht überschreiten. Die Photonenzustatistik ist sozusagen in diesem Bereich *gefangen*. Im Grenzfall verschwindender Resonatordämpfung würde der Zustand sogar gegen einen Fockzustand mit der maximal *erlaubten* Photonenzahl streben. Aufschluß über dieses Phänomen gibt die Photonenzustatistik bei $T = 0$ K:

$$\langle n | \rho^{(SS)} | n \rangle \stackrel{T=0K}{=} \mathcal{N} \prod_{m=1}^n \frac{N_{ex}}{m} \sin^2(g\tau\sqrt{m}) \quad (2.39)$$

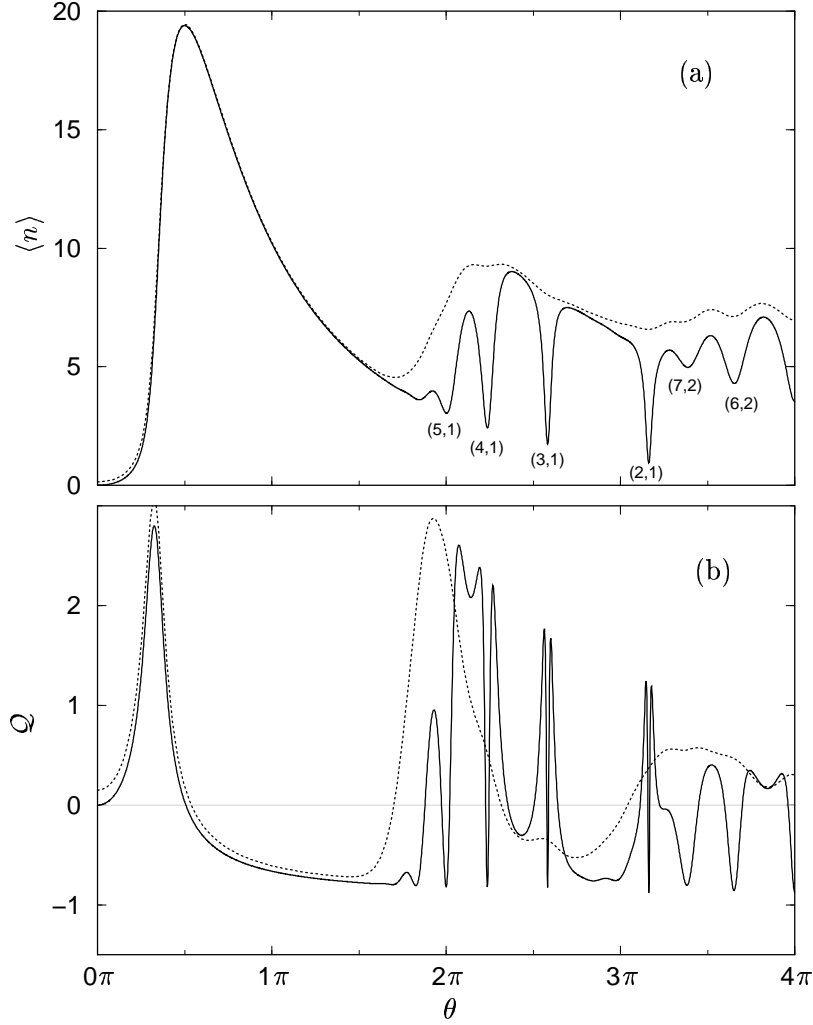


Abbildung 2.3: **Bild (a)** zeigt den Verlauf der mittleren Photonenzahl als Funktion des Pumpparameters bei zwei verschiedenen Temperaturen, $n_{th} = 0.15 \rightarrow 500$ mK (\cdots) und $n_{th} = 10^{-5} \rightarrow 90$ mK (---). $N_{ex} = 20$. Charakteristische Stellen: $\theta = 1$, erste EAM-Schwelle: Das von einem Atom emittierte Photon bleibt bis zu der nächsten Atomwechselwirkung gespeichert. Es tritt verstärkte induzierte Emission ein. $\theta = \pi/2$, Sättigung: Die Atome geben ihre Energie beinahe mit Wahrscheinlichkeit 1 ab, verlassen den Resonator also im Zustand $|b\rangle$. Bei vorhandener Dämpfung werden ca. $N_{ex} = r/\Gamma$ Photonen stationär gespeichert. $\theta = 2\pi$, zweite EAM-Schwelle: Das Atom-Feld-System wird bistabil. Die Photonenstatistik zeigt in diesem Bereich zwei Maxima, das eine bei $\langle n \rangle \approx 3$ und das andere bei $\langle n \rangle \approx 13$, zwischen denen das System hin- und herspringen kann. Die Einbrüche ab der zweiten Schwelle sind ein Abbild der Fangzustände. Sie wurden wie in [53] mit $(N+1, q)$ gekennzeichnet ($q2\pi$ -Drehung des Blochvektors bei N Photonen). **Bild (b)** zeigt den Q-Parameter, ein Maß für die Breite der Photonenstatistik. Nach der Sättigung läuft der EAM in einer Subpoissonstatistik, die ab der zweiten EAM-Schwelle durch das Auftreten des zweiten Maximums in der Photonenzahlverteilung und den Fangzuständen gestört wird. An den Stellen der Fang-Bedingung wird Q beinahe -1, d.h. der Feldzustand approximiert dort einen Fockzustand.

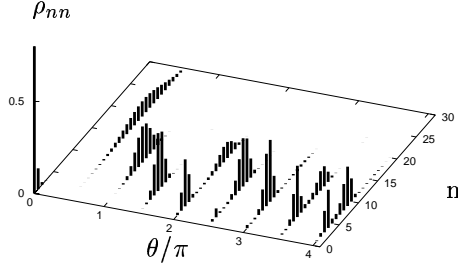


Abbildung 2.4: *Photonenstatistik als Funktion des Pumpparameters. Nach oben aufgetragen: Wahrscheinlichkeit n Photonen im Feld zu messen. Beim Übergang von $\theta = \pi/2$ nach 2π ist deutlich die Verschmälerung der Verteilung zu erkennen - auch Subpoissonbereich genannt. Bei $\theta \sim 2.5\pi$ springt die Photonenzahl auf den Zweig höherer Intensität über. Im Übergangsbereich $\theta \sim 2\pi$ weist die Verteilung zwei Maxima auf, der EAM-Zustand zeigt hier bistabiles Verhalten.*

Die Wahrscheinlichkeit für n Photonen im Resonator berechnet sich also aus einem Produkt von n Faktoren. Gilt für eine spezielle Wechselwirkungszeit die *Fang-Bedingung*

$$\begin{aligned} g\tau\sqrt{N+1} &= q\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= q\pi\sqrt{\frac{N_{ex}}{N+1}}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

wird der $N+1$ 'te-Faktor Null, und die Photonenzahl bricht für $n > N$ ab. Der erste Fangzustand (*Trapping-State*) würde für $N = N_{ex}$ bei $\theta \simeq \pi$ auftreten. Allerdings ist in diesem Bereich die Photonenzahl um $n = N_{ex}/2$ lokalisiert. Ein Abschneiden über $n = N_{ex}$ hat daher keine sichtbaren Auswirkungen. Die ersten Fangzustände zeigen sich vor der zweiten EAM-Schwelle bei $N \sim N_{ex}/4 \Rightarrow \theta \simeq 2\pi$.

Erst kürzlich konnten Fangzustände erstmals auch im Experiment nachgewiesen werden [74].

2.7 Die Mastergleichung als Eigenwertproblem

Nachdem gezeigt wurde, daß stationäre Lösungen der EAM-Mastergleichung analytisch angegeben werden können, ist es nun insbesondere im Zusammenhang mit der Phasendiffusion und Linienbreite des EAM-Feldes entscheidend, auch das dynamische Problem zu lösen. Man interessiert sich also für die zeitliche Propagation eines beliebigen Anfangszustands, die durch formale Integration von Gln. 2.34 als

$$\rho(t) = e^{\mathcal{M}t} \rho(0) \quad (2.41)$$

geschrieben werden kann. Wie oben bereits angesprochen, koppelt diese Zeitentwicklung in der Energieeigendarstellung nur diagonale Dichtematrixelemente untereinander und ermöglicht so die Aufspaltung der Gln. 2.41 in ein Set von unabhängigen Mastergleichungen, die jeweils von der Dichtematrix nur eine bestimmte Nebendiagonale enthalten. Ferner erweist es sich als praktisch auf eine gewöhnliche Vektor- und Matrixschreibweise überzugehen und man erhält

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = e^{\mathbf{M}^{(k)}t} \mathbf{x}^{(k)}(0). \quad (2.42)$$

Die Dichtematrixelemente $\langle n|\rho|n+k \rangle$ werden dabei als n -te Komponenten in den Vektor $\mathbf{x}^{(k)}$ eingetragen und die entsprechenden Matrixelemente der in Fockdarstellung vierdimen-

sionalen \mathcal{M} -Matrix wurden in geeigneter Form in die (zweidimensionale) Matrix $M^{(k)}$ übernommen (siehe Anhang B). Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden der Index (k) unterdrückt.

Es zeigt sich jedoch, daß selbst die obige reduzierte Mastergleichung nicht allgemein gelöst werden kann. Deswegen ist es zweckmäßig eine Eigenwertanalyse durchzuführen, bei der sich herausstellen wird, daß sich die Dynamik einzelner Dichtematrix-Nebendiagonalen \mathbf{x} annähernd durch einen einfachen exponentiellen Zerfall darstellen läßt. In der Sprache des Eigenwertproblems ausgedrückt bedeutet das, daß in diesen Fällen die Matrix M , angewendet auf die entsprechende Nebendiagonale, durch einen Eigenwert ersetzt werden kann.

Im allgemeinen Fall muß der Vektor \mathbf{x} in Eigenvektoren von M entwickelt werden. Die Zeitentwicklung schreibt sich dann als gewichtete Summe von Exponentialfunktionen.

Man setzt also die Eigenwertgleichung der gesuchten Eigenvektoren an

$$M\mathbf{r}_l = -\lambda_l \mathbf{r}_l. \quad (2.43)$$

Diese Eigenvektoren \mathbf{r}_l werden auch als die rechts-seitigen Eigenvektoren des Problems bezeichnet.

Es ist jedoch zu beachten, daß die Matrix M nicht symmetrisch ist. Deswegen kann weder damit gerechnet werden, daß die Eigenvektoren ein Orthonormalsystem bilden, noch daß die Eigenwerte reell sind. Nicht einmal die Diagonalisierbarkeit ist garantiert. Trotzdem wird im Folgenden angenommen, daß eine diagonale Darstellung mit stets linear unabhängigen Eigenvektoren existiert³. Ein beliebiger Vektor kann dann in dieser Basis entwickelt werden

$$\mathbf{x} = \sum_l c_l \mathbf{r}_l. \quad (2.44)$$

Die Koeffizienten c_l können auf zwei verschiedene Arten bestimmt werden. Zum einen kann man die Gleichung 2.44 als lineares Gleichungssystem betrachten und nach den c_l 's auflösen. Dieses Verfahren hat sich besonders bei der numerischen Behandlung bewährt. Zum anderen kann man einen formaleren Weg über die Bestimmung der sogenannten links-seitigen Eigenvektoren \mathbf{l}_l wählen. Sie sind über die Eigenwertgleichung

$$\mathbf{l}_l^\top M = -\lambda_l \mathbf{l}_l^\top \quad (2.45)$$

definiert. Dieses Funktionensystem wird nun zusammen mit den rechts-seitigen Eigenvektoren zur Normierung herangezogen. Es gilt

$$\mathbf{l}_i \mathbf{r}_j = \delta_{ij}. \quad (2.46)$$

Mit Hilfe dieser Orthonormierungsbedingung erhält man folgenden Ausdruck für die Koeffizienten

$$c_l = \mathbf{l}_l \mathbf{x}. \quad (2.47)$$

Setzt man nun den Koeffizienten in Gln. 2.44 ein, so ist die Zeitentwicklung eines Vektors $\mathbf{x}(0)$, ausgedrückt durch Eigenwerte und Eigenvektoren von M , nach Gln. 2.42 gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \sum_l [\mathbf{l}_l \mathbf{x}] \mathbf{r}_l e^{-\lambda_l t}. \quad (2.48)$$

³Diese Annahme stellt in der Tat keine prinzipielle Einschränkung dar, weil jedes lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ein Fundamentalsystem besitzt, welches zur Entwicklung verwendet werden kann.

Ein bekannter Sonderfall dieser Gleichung ist z. B. der stationäre EAM-Zustand $\mathbf{x}^{(0)}$, der identisch mit dem Eigenvektor \mathbf{r}_l der Matrix $M^{(0)}$ ist und aufgrund der Zeitunabhängigkeit den Eigenwert $\lambda_l = 0$ besitzt.

Ferner ist das Eigenwertspektrum der Matrix $M^{(1)}$ für den Grenzfall ohne atomares Pumpen ($\theta = 0$, $\tau = 0$) gegeben durch $\lambda_l = (l + 1/2)\Gamma$ [92].

2.8 Bedingungen an die Ein-Atom-Maser Parameter

Um all die quantenmechanisch interessanten Effekte im EAM nachweisen zu können wird zum Abschluß dieses Kapitel auf die experimentellen Bedingungen an die Betriebsparameter eingegangen.

Beim *normalen* Maser führt der spontane Zerfall in nichtaktive Niveaus zu einer großen Streuung der Wechselwirkungszeiten. Dieses inkohärente Abbrechen der Wechselwirkungsphase muß beim EAM unterbunden werden. Deswegen sollte für die Lebensdauer der Atome τ_A und die Streuung der Wechselwirkungszeiten τ

$$\begin{aligned} \tau_a &\gg \tau & (\tau_a(63\text{P}) = 250 \mu\text{s}, \tau \sim 50 \mu\text{s}) \\ \Delta\tau/\tau &\ll 1 & (< 4\%) \end{aligned} \quad (2.49)$$

gelten⁴. Ferner sollte die Emissionswahrscheinlichkeit eines Atoms so hoch sein, daß bereits wenige Atome pro Resonatorzerfallszeit ausreichen, um ein Photonenfeld aufzubauen. Der atomare Übergang muß also bereits bei wenigen oder sogar keinen Photonen (=Nullpunktsfeld) gesättigt sein. Dies ist dann der Fall, wenn man eine signifikante Vakuum-Rabioszillation fordert, was nach Gln. 2.23 zu der Abschätzung

$$g\tau \geq 1 \quad (1 \dots 5) \quad (2.50)$$

führt. Da der Pumpvorgang beim EAM über das Jaynes-Cummings-Modell beschrieben werden soll, muß man den atomaren Fluß $r = t_{at}^{-1}$ klein wählen, so daß die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten zweier Atome im Resonator weit unter 10% gedrückt wird:

$$t_{at} \gg \tau \quad (t_{at} \sim 1 \text{ ms}) \quad (2.51)$$

Bei einem poissonschen Atomstrahl beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß der zeitliche Abstand eines Atoms zu seinen Nachbarn größer als τ ist [61]

$$\exp\left(\frac{-2\tau}{t_{at}}\right) \quad (> 90\%). \quad (2.52)$$

Bisher wurde die Dämpfung noch völlig außer acht gelassen. Tatsächlich relaxiert das EM-Feld mit der Zeitkonstante $t_{cav} = \Gamma^{-1}$ in den thermischen Zustand, der durch die mittlere thermische Photonenzahl n_{th} charakterisiert ist. Um ein von den Atomen erzeugtes Feld in diesem verlustbehafteten Resonator aufbauen zu können, muß die Photonen-speicherzeit größer als die Zeit zwischen zwei Atomen t_{at} sein, so daß für die maximale Anzahl der im Resonator gespeicherten Photonen

$$N_{ex} = \frac{t_{cav}}{t_{at}} = r/\Gamma > 1 \quad (N_{ex} = 10 \dots 100, t_{cav} = 4 \dots 400 \text{ ms}) \quad (2.53)$$

⁴In Klammern sind typische Werte der Garching Experimente angegeben.

gilt. Die Bedingung an die Güte zur stationären Speicherung von mindestens einem Photon lautet dann

$$Q = \omega_F / \Gamma \geq \omega_F / r. \quad (2.54)$$

Soll nun das thermische Feld gegenüber dem atomar erzeugten nicht überwiegen, muß der Resonator auf eine Betriebstemperatur T gebracht werden, die folgender Relation genügt:

$$n_{th} < N_{ex} \quad (500 \text{ mK} \rightarrow n_{th} = 0.15) \quad (2.55)$$

Zusammenfassend kann man sagen, daß drei Zeitskalen in die EAM-Theorie eingehen, die sich typischerweise jeweils um eine Größenordnung unterscheiden:

$$\tau (< \tau_A) < t_{at} = r^{-1} < t_{cav} = \Gamma^{-1}. \quad (2.56)$$

Kapitel 3

Kopplung eines klassischen Feldes an die Resonatormode

Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Meßschemata beruhen alle auf Experimenten, bei denen eine externe Mikrowellenstrahlung an das Resonatorfeld angekoppelt werden muß. Analog zum gekoppelten Pendel, wird die Wechselwirkungsenergie in Form einer Amplitudenkopplung zwischen dem quantenmechanischen Resonatorfeld, beschrieben durch die Operatoren a, a^\dagger , und der klassischen Amplitude $f e^{-i\omega_S t}$ des Synthesizers in der Form

$$\mathcal{H}_{\text{SF}} = \hbar \left(a f^* e^{i\omega_S t} + a^\dagger f e^{-i\omega_S t} \right) \quad (3.1)$$

angesetzt (Drehwellennäherung).

Wie im folgenden gezeigt wird, können mit diesem Hamiltonoperator sowohl Zustandsverschiebungen im Phasenraum realisiert werden, als auch einem stationären EAM-Zustand eine Phasenauszeichnung aufgeprägt werden.

Speziell zur Erklärung der Meßergebnisse wird es notwendig sein die Atomdynamik im Resonator bei Ankopplung des Synthesizers zu untersuchen. Dieses Problem wurde bis jetzt noch nicht allgemein gelöst. Lediglich der Fall ohne Dämpfung konnte von P. Alsing *et al.* [43] analytisch angegeben werden. An anderer Stelle fanden G.S. Agarwal *et al.* [46] Lösungen mit Dämpfung in der Näherung kleiner Resonatorgüten. Zum Schluß dieses Abschnitts wird gezeigt, daß mit den in dieser Arbeit entwickelten mathematischen Tricks, Hochfeldnäherungen auch für hohe Güten angegeben werden können.

3.1 Verschiebung im Phasenraum

Der oben eingeführte Wechselwirkungsoperator \mathcal{H}_{SF} besitzt eine interessante Eigenschaft. Setzt man ihn als Zeitentwicklungsoperator in die Schrödingergleichung ein, so verhält er sich für feste Zeiten und Resonanz wie der Verschiebungsoperator. Der Zusammenhang zwischen der Feldstärke f , Zeitentwicklungsdauer t und der resultierenden Verschiebung γ läßt sich schnell herstellen. Beschränkt man sich auf einen reinen Zustand $|\psi\rangle$, so kann der im Phasenraum verschobene Zustand $|\psi_\Rightarrow\rangle$ mit Hilfe des Verschiebungsoperators als

$$|\psi_\Rightarrow\rangle = D(\gamma)|\psi\rangle = e^{\gamma a^\dagger - \gamma^* a} |\psi\rangle \quad (3.2)$$

geschrieben werden. Wird andererseits der Ausgangszustand $|\psi\rangle$ an eine Feldstärke f angekopelt, so erhält man für den Zustand nach der Zeit t (Wechselwirkungsbild, Resonanz)

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}'_{SF}t}|\psi\rangle = e^{-i(af^* + a^\dagger f)t}|\psi\rangle. \quad (3.3)$$

Wie man leicht nachprüft, lassen sich der Zeitentwicklungs- und der Verschiebungsoperator durch die Ersetzung $\gamma \leftrightarrow -ift$ ineinander überführen. Es gilt also

$$D(\gamma = -ift) \equiv U(t). \quad (3.4)$$

Im Experiment können somit die im Resonator gespeicherten Feldzustände durch Mikrowelleneinstrahlung im Phasenraum verschoben werden. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Einstrahlzeit kurz gegenüber der Felddämpfung (Γ^{-1}) gewählt werden muß.

3.2 Phasengekoppelter Ein-Atom-Maser Zustand

Im Kapitel 2.5 wurde der stationäre EAM-Zustand berechnet. Es stellte sich heraus, daß die entsprechende Dichtematrix immer diagonal ist, d.h. es gibt keine Vorzugsphase (im Phasenraum rotationssymmetrischer Zustand), weil weder die Ankopplung an das Wärmebad noch die Pumpatome die Phasensymmetrie brechen. Für die hier vorgestellten Meßmethoden wird es aber unerlässlich sein, daß temporär phasenausgezeichnete Zustände erzeugt werden, um danach die Auswirkung des Zerfalls der mittleren Feldstärke auf die Atomstatistik aufzeichnen zu können. Eine Methode dies zu erreichen ist das hier beschriebene *Seeden* (engl.=„Samenkorn“) des Feldzustands mit Hilfe einer externen Synthesizerstrahlung. Dabei ist das Ziel, die Synthesizer**intensität** so schwach zu wählen, daß sich die mittlere Feldintensität des neuen stationären Zustands nur minimal ändert, die Synthesizer**phase** jedoch auf das EAM-Feld übertragen wird.

Um abschätzen zu können, wie stark sich die Feldintensität bei zunehmender Synthesizerleistung verändert, sucht man die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung für die mittlere Photonenzahl im Resonator gemäß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle &= \text{Tr} \left(a^\dagger a \dot{\rho} \right) \\ &= \text{Tr} \left(a^\dagger a \left((\mathcal{L} + r(\mathcal{A} + \mathcal{B} - 1)) \rho - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_{SF}, \rho] \right) \right) \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Um den simultanen Einfluß der Mikrowelle während der EAM-Dynamik zu berücksichtigen, wurde die Mastergleichung 2.34 um den Term $i/\hbar [\mathcal{H}_{SF}, \rho]$ erweitert.

Die Anteile der Dämpfung und des externen Feldes können abgeschätzt werden, indem man fordert, daß sich das Feld stets in einem kohärenten Zustand der Amplitude $\sqrt{\langle n \rangle}$ ($\langle n \rangle$ =mittlere Photonenzahl im Feld) befindet. Der atomare Teil kann unter der Voraussetzung einer scharf *gepeakten* Photonenzahlverteilung aus der Photonenratengleichung abgeleitet werden [56]. Beide Bedingungen sind im semiklassischen Grenzfall erfüllt. Gesetzt den Fall, daß sowohl die Resonatormode, als auch der Synthesizer resonant zum atomaren Übergang sind, erhält man als Bedingungsgleichung für die stationäre Feldamplitude

$$N_{ex} \sin^2 \left(\theta \sqrt{\frac{\langle n \rangle + 1}{N_{ex}}} \right) + \frac{2|f|}{\Gamma} \sqrt{\langle n \rangle} = (\langle n \rangle - n_{th}). \quad (3.6)$$

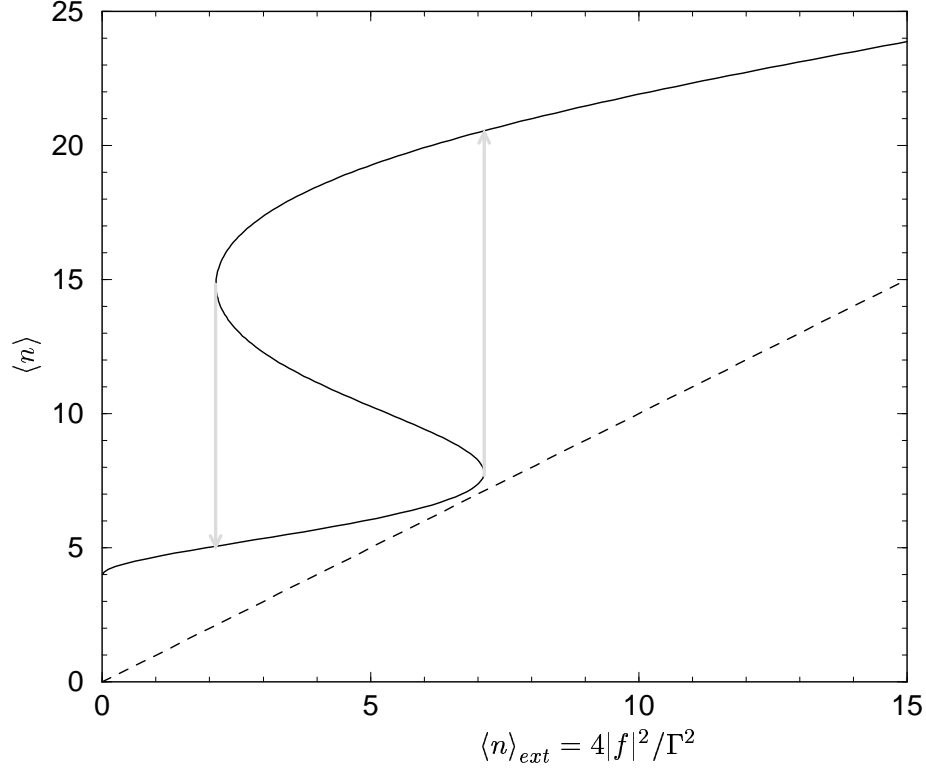


Abbildung 3.1: Mittlere Resonator-Photonenzahl $\langle n \rangle$ in Abhängigkeit der eingestrahelten Feldstärke f , hier in Einheiten der mittleren eingekoppelten Photonenzahl $\langle n \rangle_{ext}$ aufgetragen, die sich ohne Pumpatome einstellen würde. Der Anfangsverlauf ist im Vergleich zur Kurve ohne Atome (— — —) deutlich flacher, da im Bereich $\theta = 3.5$ die Pumpleistung der Atome mit höherer Feldintensität abnimmt (Bereich vor der 2. Schwelle). Im Bereich von $\langle n \rangle_{ext} = 2 \dots 7$ zeigt das Feld bistabiles Verhalten. Es gibt zwei stabile Arbeitsbereiche zwischen denen die Feldintensität hin und her springen kann, ein Phänomen das auch im stationären EAM-Zustand in der Umgebung der zweiten und höheren Schwellen beobachtet werden kann. Die eingezeichneten grauen Pfeile kennzeichnen die extremen Punkte des Feldintensitätssprungs bei schneller Erhöhung (\uparrow) bzw. Verringerung (\downarrow) der eingestrahelten Intensität. Weitere verwendete Parameter: $N_{ex} = 10$, $n_{th} = 0.15$.

Kann der atomare Pumpterm vernachlässigt werden, läßt sich obige Gleichung nach der mittleren Photonenzahl auflösen und kann in der Form

$$\langle n \rangle = \frac{\langle n \rangle_{ext}}{2} + n_{th} + \frac{1}{2} \sqrt{\langle n \rangle_{ext}^2 + 4 \langle n \rangle_{ext} n_{th}} \quad (3.7)$$

geschrieben werden. Dabei wurde die skalierte Synthesizerintensität $\langle n \rangle_{ext} = 4|f|^2/\Gamma^2$ verwendet, die die mittlere eingekoppelte Photonenzahl bei 0 K und $\theta = 0$ bezeichnet. In Abb. 3.1 ist der Verlauf der mittleren Photonenzahl im Resonator gegen die eingestrahelte Intensität nach Gln. 3.6 aufgetragen. Sinnvollerweise würde man zum Seeden des Zustands in diesem Beispiel einen $\langle n \rangle_{ext}$ -Wert von ungefähr 1.5 wählen, bei dem sich einerseits die gesamte Photonenzahl $\langle n \rangle$ nur unwesentlich erhöht hat und andererseits sichergestellt ist, daß das System nicht in das bistabile Regime mit hohen Intensitätsfluktuationen getrieben wird. Die Frage nach der Phasenaufprägung wurde bereits in [65] anhand von Phasenraumfunktionen untersucht und soll hier nur kurz zusammengefaßt werden.

Als problemlos haben sich Zustände mit hohen Photonenzahlen erwiesen ($n > 10$). Ihnen kann bereits mit sehr kleinen Synthesizerintensitäten (im Bereich 10% - 20% der atomar gepumpten Feldintensität) eine deutliche Phase aufgeprägt werden, ohne daß sich die gesamte mittlere Photonenzahl wesentlich erhöht. Problematisch dagegen sind hauptsächlich folgende Fälle:

- **Bereiche schneller Phasendiffusion**, z.B. vor der zweiten EAM-Schwelle bei $\theta \sim 5$. Die vom Synthesizer auf das Feld übertragene Phase wird hier schneller abgebaut. Auch höhere Intensitäten führen nur zu mäßigen Ergebnissen. Allerdings sorgt der EAM-Regelmechanismus (Erhöhung der Feldintensität bewirkt eine Abnahme der atomaren Emissionswahrscheinlichkeit) für eine Stabilisierung der Intensität, so daß selbst große eingestrahlte Intensitäten ($\langle n \rangle_{ext} \approx \langle n(f=0) \rangle$) die mittlere Photonenzahl des Feldes kaum erhöhen.
- **Bereiche kleiner Photonenzahlen**. Wird der EAM mit kleinen $N_{ex} (< 10)$ betrieben, ist die gespeicherte Photonenzahl bei $\theta \sim 1.5$ in der gleichen Größenordnung. Im Gegensatz zum letzten Fall reagiert die EAM-Intensität im Sättigungsbereich auf äußere Einflüsse sensibler, weswegen die eingestrahlte Intensität klein gewählt werden muß ($\sim 10\%$ der vorhandenen Intensität).

Bei besonders kritischen Fällen kann man im Experiment natürlich auch mit einem kohärenten Zustand (ohne Pumpatome) beginnen und die Phasendiffusion unter dieser Anfangsbedingung untersuchen.

3.3 Atom-Feld-Synthesizer Wechselwirkung im verschobenen Bild

Will man nun die Dynamik des Atom-Feld-Systems unter Einwirkung des extern eingestrahnten Mikrowellenfeldes genauer untersuchen, um etwa die resultierenden stationären Feldzustände oder die Atomstatistik berechnen zu können, muß man den Versuch unternehmen die Mastergleichung für das gekoppelte Atom-Feld-System, beschrieben durch ρ_{AF} , der Form

$$\dot{\rho}_{AF} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho_{AF}] + \mathcal{L}\rho_{AF} \quad (3.8)$$

zu lösen. Obwohl man beim typischen EAM-Betrieb die Felddämpfung während der atomaren Wechselwirkung vernachlässigen kann, wird sie hier in die Beschreibung eingeschlossen, damit auch stationäre Situationen der Feld-Synthesizer-Wechselwirkung als Anfangszustand gewählt werden können. Der gesamte Hamiltonoperator setzt sich aus den freien Anteilen und den Atom-Feld- sowie Feld-Synthesizer-Kopplungstermen wie folgt zusammen (Schrödingerbild):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_A \sigma_z + \hbar \omega_F a^\dagger a + \underbrace{\hbar g (ac^\dagger + a^\dagger c)}_{\text{Atom} \leftrightarrow \text{Feld}} + \underbrace{\hbar (af^* e^{i\omega_S t} + a^\dagger f e^{-i\omega_S t})}_{\text{Feld} \leftrightarrow \text{Synthesizer}} \quad (3.9)$$

Die hochfrequenten Anteile können durch eine Transformation in ein mit ω_S rotierendes Bezugssystem eliminiert werden. Nach der in Anhang A eingeführten Nomenklatur lautet der unitäre Transformationsoperator

$$\mathbf{T}'(t) = e^{-i\omega_S t (1/2 \sigma_z + a^\dagger a)}. \quad (3.10)$$

Der Liouvilleoperator stellt sich als invariant gegenüber $T(t)$ heraus, während sich der Hamiltonoperator zu

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2}\hbar\delta_{\text{AS}}\sigma_z + \hbar\delta_{\text{FS}}a^\dagger a + \hbar g \left(ac^\dagger + a^\dagger c \right) + \hbar \left(af^* + a^\dagger f \right) \quad (3.11)$$

transformiert. $\delta_{\text{AS}} = \omega_{\text{A}} - \omega_{\text{S}}$ und $\delta_{\text{FS}} = \omega_{\text{F}} - \omega_{\text{S}}$ bezeichnen dabei die Atom-Synthesizer- und Feld-Synthesizer-Verstimmungen.

Der entscheidende Trick an dieser Stelle ist nun eine erneute unitäre Transformation in ein im Phasenraum des Feldes verschobenes Bild [37, 46]. Die Amplitude der Verschiebung ist dabei so gewählt, daß der „klassische“ Anteil des Synthesizers genau wegtransformiert wird. Als richtige Wahl stellt sich heraus

$$T^\rightarrow(\gamma) = D(-\gamma) \quad (3.12)$$

mit

$$\gamma = \frac{f}{i\Gamma/2 - \delta_{\text{FS}}}. \quad (3.13)$$

Die Transformation 3.12 führt auf den um die Amplitude $-\gamma$ im Phasenraum verschobenen Dichteoperator

$$\rho_{\text{AF}}^{\rightarrow\prime} = D^\dagger(\gamma)\rho'_{\text{AF}}D(\gamma), \quad (3.14)$$

und, bei Vernachlässigung des auftretenden irrelevanten Terms $\hbar\delta_{\text{FS}}|\gamma|^2$, die transformierte Mastergleichung

$$\dot{\rho}_{\text{AF}}^{\rightarrow\prime} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}^{\rightarrow\prime}, \rho_{\text{AF}}^{\rightarrow\prime}] + \mathcal{L}\rho_{\text{AF}}^{\rightarrow\prime} \quad (3.15)$$

mit

$$\mathcal{H}^{\rightarrow\prime} = \frac{1}{2}\hbar\delta_{\text{AS}}\sigma_z + \hbar\delta_{\text{FS}}a^\dagger a + \underbrace{\hbar g (ac^\dagger + a^\dagger c)}_{\text{Atom} \leftrightarrow \text{Feld}} + \underbrace{\frac{\hbar}{2}\Omega (c + c^\dagger)}_{\text{Atom} \leftrightarrow \text{Synthesizer}} \quad (3.16)$$

und der semiklassischen Rabifrequenz $\Omega = 2g\gamma$, die durch eine Phasentransformation der Systemoperatoren reell gewählt wurde. Der Liouvilleoperator hat sich bei der Transformation reproduziert und kann für den Γ -Anteil in der Verschiebungsamplitude verantwortlich gemacht werden.

Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist nun, daß die ursprüngliche Feld-Synthesizer-Kopplung in eine Atom-Synthesizer-Kopplung gewandelt und gleichzeitig die durch den Synthesizer erzeugte hohe Resonatorfeldstärke wegtransformiert wurde. Letztere Tatsache hat besonders für die numerische Integration der Mastergleichung erhebliche Vorteile, da sich der relevante Fockraum auf den thermischen Zustand (plus atomares Pumpen) reduziert hat. Die hohe Feldstärke geht allein durch die erhöhte klassische Rabifrequenz in das Problem ein. Zum anderen kann man nun die Mastergleichung, wie im folgenden näher ausgeführt wird, leichter physikalisch interpretieren.

3.4 Stationärer Zustand ohne Pumpatome

Den stationären Zustand, der allein durch die Einstrahlung des Synthesizers in den Resonator entsteht, kann sofort aus obiger Mastergleichung 3.15 für $g = 0$ abgelesen werden. Da die letzten beiden Kopplungsterme verschwinden, bleiben für den reversiblen Teil nur noch die zur Verstimmung proportionalen freien Energieterme übrig. Der irreversible Dämpfungsterm bleibt nach wie vor erhalten. Folglich ist der (in Fockdarstellung diagonale) Eigenzustand zu \mathcal{L} , der wohlbekannte thermische Zustand, auch Eigenzustand dieses Problems. Nach der Rücktransformation entsteht der gesuchte Zustand

$$\rho = \text{Tr}_A \left(\rho_{\text{AF}} \right) = D(\gamma) \rho^{(th)} D^\dagger(\gamma)$$

$$\rho^{(th)} = \frac{1}{n_{th} + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n_{th}}{n_{th} + 1} \right)^n |n\rangle \langle n|, \quad (3.17)$$

der verschobene thermische Zustand, der für $T = 0$ K identisch ist mit dem kohärenten Zustand der Amplitude γ und der mittleren Photonenzahl

$$\langle n \rangle = |\gamma|^2 = \frac{|f|^2}{\Gamma^2/4 + \delta_{\text{FS}}^2}. \quad (3.18)$$

3.5 Atomdynamik bei externer Einstrahlung

Um sehr direkt Aussagen über die Atomstatistik machen zu können, wird nun eine dritte Transformation der Mastergleichung nötig sein. Bei der letzten Transformation ins verschobene Bild wurde die Wirkung des Synthesizers auf den Feldzustand abgezogen und durch eine schnellere Rabifrequenz Ω im Synthesizer-Atom-Term kompensiert. Bei diesem Schritt gingen keinerlei mathematische Näherungen ein.

Eine besonders einfache Mastergleichung erhält man nun, indem man in diesem verschobenen Bild die Dämpfung vernachlässigt und dann die obige Verschiebungstransformation (Gln. 3.12) invers anwendet. Das bedeutet

$$\mathcal{T}^{\leftarrow}(\gamma) = D(\gamma). \quad (3.19)$$

Die damit durchgeführte Transformation schiebt den Feldzustand wieder um die Amplitude γ zu entsprechend hohen Photonenzahlen ($\rho^{\leftrightarrow'}$). Für den Hamiltonoperator im neuen Bild erhält man

$$\mathcal{H}^{\leftrightarrow'} = \frac{1}{2} \hbar \delta_{\text{AS}} \sigma_z + \hbar \delta_{\text{FS}} a^\dagger a + \underbrace{\hbar g (ac^\dagger + a^\dagger c)}_{\text{Atom} \leftrightarrow \text{Feld}} - \underbrace{\hbar \delta_{\text{FS}} \gamma (a + a^\dagger)}_{\text{Feld} \leftrightarrow \text{Synthesizer}}. \quad (3.20)$$

Zu Veranschaulichung der bisherigen Transformationen kann Abb. 3.2 herangezogen werden. Bevor das Ergebnis gedeutet wird, soll an dieser Stelle die Bedingungen für die durchgeführte Näherung untersucht werden. Aus den Gleichungen 3.11, 3.20 erkennt man, daß die beiden Hamiltonoperatoren \mathcal{H}' und $\mathcal{H}^{\leftrightarrow'}$ genau dann gleich sind, wenn gilt

$$-\delta_{\text{FS}} \gamma = f \frac{\delta_{\text{FS}}}{\delta_{\text{FS}} - i\Gamma/2} \stackrel{?}{=} f. \quad (3.21)$$

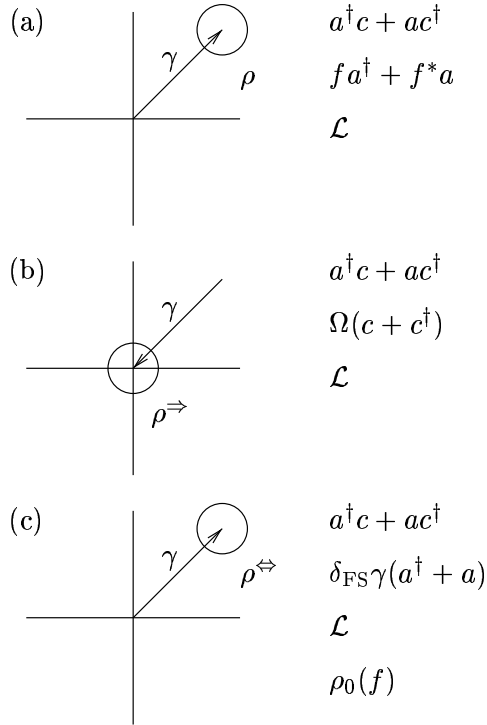


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der zwei unitären Transformationen. (Linke Spalte: Phasenraumdarstellung des Feldzustands für den Fall schwacher Pumpatome, rechte Spalte: Wesentliche Bestandteile der Mastergleichung) Bild (a) zeigt die ursprüngliche Situation, bei der das Synthesizerfeld an die Resonatormode gekoppelt wird. Der Bildwechsel in die verschobene Darstellung transformiert das Problem auf eine Synthesizer-Atom-Kopplung. Der „klassische“ Anteil wird sozusagen abgezogen (Bild (b)). Bild (c) zeigt die erneute Rücktransformation bei Vernachlässigung der Dämpfung von ρ^{\Rightarrow} . Sie führt bei einer modifizierten Anfangsbedingung auf eine Jaynes-Cummings-ähnliche Struktur. Die Wirkung des Synthesizers geht allein in die Anfangsbedingung $\rho_0(f)$ ein.

Oder gleichbedeutend mit

$$\Gamma \ll |\delta_{\text{FS}}| \quad \vee \quad \delta_{\text{FS}} \neq 0. \quad (3.22)$$

Dies stellt allerdings keine zwingende Bedingung dar. Offensichtlich ist die Näherung auch dann gut, wenn bereits der Dämpfungsterm in der Mastergleichung für ρ^{\Leftarrow} vernachlässigt werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn erstens

$$\mathcal{L}\rho^{\Leftarrow} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^{\Leftarrow} = \rho_{\text{th}} \quad (3.23)$$

gilt, d.h. wenn sich der verschobene Zustand im thermischen Gleichgewicht befindet (Pumpatome können vernachlässigt werden), oder zweitens die betrachtete Wechselwirkungszeit so kurz ist, daß der Dämpfungsterm gegen den Pumpsterm vernachlässigt werden kann, also für

$$\Gamma^{-1} \gg \tau. \quad (3.24)$$

In einem typischen EAM-Experiment ist nun gerade die letzte Bedingung gut erfüllt und daher kann auch die Mastergleichung für ρ^{\Leftarrow} mit der zusätzlichen Näherung ohne Dämpfung (auch in diesem Bild) benutzt werden. Man erhält schließlich als bemerkenswerten Sonderfall $\delta_{\text{FS}} = 0$ den Hamiltonoperator

$$\tilde{\mathcal{H}}^{\Leftarrow'} = \frac{1}{2} \hbar \delta_{\text{AS}} \sigma_z + \hbar g (ac^\dagger + a^\dagger c), \quad (3.25)$$

den wohlbekannten Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator! Dabei ist zu beachten, daß als Anfangszustand ein um γ verschobener Zustand gewählt werden muß. Somit wurde das ursprüngliche Problem für den Fall der Feld-Synthesizer Resonanz auf das Jaynes-Cummings-Problem mit veränderten Anfangsbedingungen zurückgeführt.

Beispiel

1. Die Resonatortemperatur sei $T = 0$ K.
2. Ein Synthesizer werde resonant mit der Feldstärke f an die Feldmode angekoppelt.
3. Ein Atom wechselwirke kurz (gegenüber der Felddämpfung) mit dem Resonatorfeld.

Die resultierende Atomdynamik ist dann gleich der Jaynes-Cummings-Wechselwirkung mit einem kohärentem Feld der Amplitude γ . Die Emissionswahrscheinlichkeit ist somit wie folgt gegeben durch (z.B. [44])

$$\begin{aligned}
 p_b &= e^{-|\gamma|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\gamma|^{2n}}{n!} \sin^2(g\tau\sqrt{n+1}) \\
 &\approx \frac{1}{2} \left[1 - \cos(2g\gamma\tau) e^{-\frac{1}{2}(g\tau)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

In der letzten Zeile wurde die Näherung für kleine Wechselwirkungszeiten benutzt (τ klein gegenüber 1.Revival).

◇

Kapitel 4

Adiabatizität beim realen Ein-Atom-Maser

In den letzten Kapiteln wurde angenommen, daß die beim Experiment auftretende ortsabhängige Koppelkonstante gemäß Gln. 2.30 durch einen Effektivwert \bar{g} ersetzt werden kann. Allerdings war dieser Schritt nur unter der Annahme einer diabatischen Zeitentwicklung möglich. Wie in diesem Kapitel gezeigt wird, ist dies bei den derzeitigen experimentellen Parametern, insbesondere bei externer Mikrowelleneinstrahlung, nicht immer der Fall.

Was ist aber für das Beispiel der Atom-Feld-Wechselwirkung genau unter einer diabatischen bzw. adiabatischen Zustandsentwicklung zu verstehen?

Angenommen das Atom-Feld-System sei zunächst ungekoppelt und in einem Energieeigenzustand $|a, n\rangle$ (Atom im Zustand $|a\rangle$, Feld enthält n Photonen) präpariert. Zu einem späteren Zeitpunkt werde das System gekoppelt, wobei dann die neuen Energieeigenzustände durch die bereits eingeführten *Dressed-States* mit entsprechend verschobenen Energien gegeben sind¹. Je nach Art und Weise des Einschaltvorgangs der Wechselwirkung können nun prinzipiell zwei Grenzfälle unterschieden werden:

1. **Diabatische Entwicklung.** Wird die Wechselwirkung *plötzlich* eingeschaltet, kann der Zustand $|a, n\rangle$ in den neuen Eigenzuständen entwickelt werden. Es entsteht eine nichtstationäre Überlagerung der *Dressed-States* $|n-\rangle$ und $|n+\rangle$, in der beispielsweise die atomare Inversion Rabi-Oszillationen ausführt.
2. **Adiabatische Entwicklung.** Wird die Kopplung dagegen *langsam* eingeschaltet, kann der Zustand der Energieveränderung folgen und bleibt daher immer in einem Energieeigenzustand des augenblicklichen Hamiltonoperators. Der Zustand $|a, n\rangle$ würde somit in den entsprechenden Eigenzustand des gekoppelten Systems $|n+\rangle$ adiabatisch übergehen, wobei dann alle Observablen zeitunabhängig wären.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Meßergebnisse haben gezeigt, daß beim realen EAM-Experiment Diabatizität nicht immer vorausgesetzt werden kann. Dafür kann man im wesentlichen zwei Ursachen verantwortlich machen. Zum einen *sehen* die Atome beim Durchkreuzen des Resonatorfeldes keine rechteckige, sondern eine glatte sinusförmige Modenverteilung, zum anderen sind die atomaren Energieniveaus im Bereich der Koppellöcher durch ein statisches elektrisches Feld in der Größenordnung von 300 mV/cm signifikant starkverschoben² [64, 156]. Der schematische Verlauf der Eigenenergien des Atom-Feld-Systems wird

¹In diesem Beispiel wird eine kleine Atom-Feld-Verstimmung angenommen, da die angeführten Argumente nur für nichtentartete Eigenwertspektren gültig sind ($|a, n\rangle, |b, n+1\rangle$ sind für $\delta_{AF} = 0$ entartet).

²Ursache dieses elektrischen Feldes sind Streufelder aufgrund von angrenzenden Niob-Einkristalldomänen und mögliche Rubidiumbedampfungen der Niob-Resonatoroberfläche

in Abb. 4.1 für das obige Beispiel dargestellt. Deutlich zu erkennen ist der große Energieabstand in den Resonatorrandbereichen, bei denen das elektrische Feld die beiden aktiven Rydbergniveaus um mehrere hundert Mrad/s relativ zueinander verstimmt. In der Mitte des Resonators sind diese quasi abgeklingen und der Verlauf der *Dressed-States*-Energien wird durch die sinusförmige Feldverteilung der TE_{121} -Mode bestimmt.

Es bleibt die Frage zu klären, unter welchen Bedingungen eine Zeitentwicklung als diabatisch angenommen werden kann und ab wann Adiabaticität an Einfluß gewinnt. Daher werden im folgenden zwei Adiabaticitätsparameter vorgestellt und für die aktuellen experimentellen Parameter angegeben.

4.1 Quantifizierung der Adiabaticität

Ein Adiabaticitätsparameter hat also zu unterscheiden, ob ein anfänglich stationäres System bei einem explizit zeitabhängigen Hamiltonoperator einem momentanen Energieeigenzustand folgt, oder ob es zu Umbesetzungen kommt.

Sei $E_\lambda(t)$ das (nichtentartete) Spektrum des momentanen Hamiltonoperators $\mathcal{H}(t)$ mit den Eigenvektoren $|\lambda; t\rangle$, so ist die Zeitentwicklung von $|n; t\rangle$ sicher dann adiabatisch, wenn der Energieabstand zum nächsten Nachbarn $|m; t\rangle$, bezogen auf eine charakteristische Zeit (z.B. $\hbar/(E_m - E_n)$), klein gegenüber der zeitlichen Veränderung der Energie E_n selbst ist [3].

Folgt man dem Ansatz von A. Mostafazadeh [47], so liegt Adiabaticität im Zeitintervall $t \in [\tau_1, \tau_2]$ genau dann vor, wenn gilt

$$\zeta := \frac{\hbar\omega_c(\tau_1, \tau_2)}{\Delta E} \ll 1. \quad (4.1)$$

ΔE definiert dabei eine geeignete Skalierung. Ferner wurde die charakteristische Frequenz

$$\begin{aligned} \omega_c(\tau_1, \tau_2) : &= \text{Sup} \left\langle m; t \left| \frac{d}{dt} \right| n; t \right\rangle \\ &= \text{Sup} \frac{\left\langle m; t \left| \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} \right| n; t \right\rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

eingeführt. „Sup“ bezeichnet das Supremum des dahinterstehenden Ausdrucks bei Variation von t im Intervall $[\tau_1, \tau_2]$.

Speziell für die Atom-Feld-Dynamik kann ein alternatives Maß eingeführt werden, das sich aus dem semiklassischen Blochbild ableiten läßt und soll hier wegen der höheren Anschaulichkeit zusätzlich diskutiert werden. Wie bereits in Abb. 2.2 beschrieben, kann die Atom-Feld-Dynamik als adiabatisch betrachtet werden, wenn die *Klappbewegung* des Präzessionsvektors $\vec{\Delta}$ langsam gegenüber der Rabi-Frequenz $|\vec{\Delta}|$ erfolgt. Man definiert

$$\tilde{\zeta} := \text{Sup} \frac{\dot{\vartheta}}{|\vec{\Delta}|}. \quad (4.3)$$

Für adiabatische Prozesse gilt wie bei der obigen Definition $\tilde{\zeta} \ll 1$.

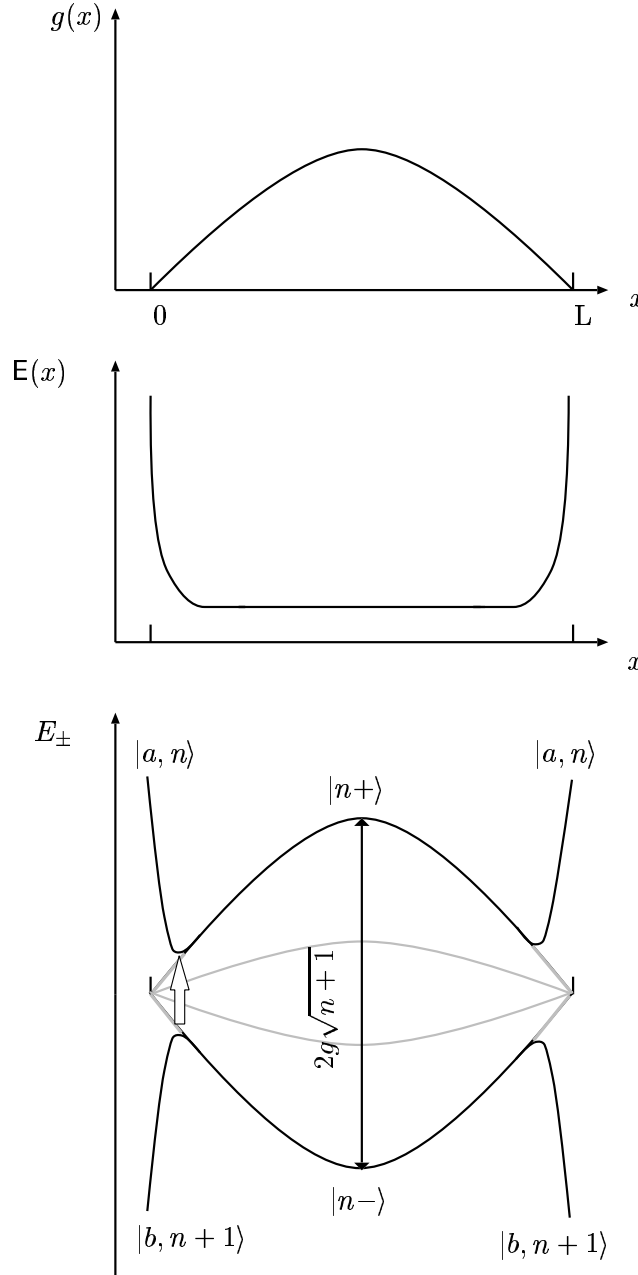


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Energie-Ortsabhängigkeit des Atom-Feld-Systems beim Durchqueren des Resonators ($x = 0$ Resonatoreintrittsloch, L ist die Resonatorlänge). Im Bild **oben** ist die Koppelkonstante $g(x)$ aufgetragen, die den sinusförmigen Verlauf der TE_{121} -Feldmode widerspiegelt. In der **Bildmitte** ist das statische elektrische Feld abgeschätzt, das im Bereich der Koppellöcher Werte bis zu 300 mV/cm annehmen kann und zur Resonatormitte hin exponentiell abfällt. In der Mitte bleibt ein für die Dynamik irrelevanter Offset von ca. 5 mV/cm bestehen, der nicht weiter berücksichtigt werden muß. Beide Größen haben nun Einfluß auf den Verlauf der Dressed-States-Energien E_{\pm} . Wie im **unteren** Bild dargestellt, werden die Energien im Randbereich durch den statischen Starkeffekt mehrere hundert Mrad/s verstimmt. In der Mitte sind die statischen Felder abgeklungen und die Dressed-State Aufspaltung ist nun proportional zu $g(x)$.

Zum Vergleich sind die Energien bei Abwesenheit elektrischer Felder für 0 und n Photonen grau eingezeichnet (Energie-Offset wurde dabei umskaliert).

Ein adiabatischer Verlauf würde einen anfänglichen Zustand $|a, n\rangle$ direkt in den Dressed-State $|n+\rangle$ überführen. Je nach Beschaffenheit des Knicks bei der markierten Position können allerdings diabatische Übergänge nach $|n-\rangle$ relevant werden.

4.2 Adiabatizitätsparameter der Ein-Atom-Maser Dynamik

Wie oben bereits angesprochen, müssen in der EAM-Theorie zwei Dinge für eine realistische Atom-Feld Dynamik berücksichtigt werden. Zum einen muß die Koppelkonstante gemäß dem sinusförmigen Verlauf der TE_{121} -Resonatormode als zeitabhängige Größe der Form

$$g \rightarrow g(t) = \frac{\pi \bar{g}}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \quad (4.4)$$

geschrieben werden ($\bar{g} = 40$ krad/s). Zum anderen verursachen die statischen elektrischen Felder in den Randbereichen des Resonators einen ortsabhängigen quadratischen Starkeffekt

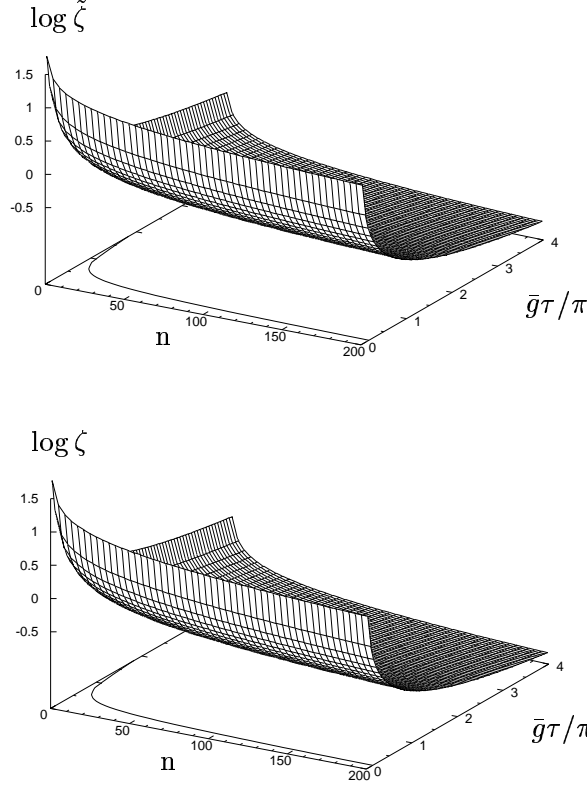


Abbildung 4.2: Vergleich der beiden Adiabazitätsparameter bei einer Streufeldlänge von 1.5 mm. Im **oberen** Bild ist der Adiabazitätsparameter $\tilde{\zeta}$ aus Gln. 4.3 über die (scharfe) Photonenzahl im Resonator und über die skalierte Wechselwirkungszeit logarithmisch aufgetragen. Als Konturlinie ist der Funktionswert $\log \tilde{\zeta} = 0$ gewählt, der als Trennungslinie zwischen adiabatischem (negativ) und diabatischem (positiv) Verhalten gesehen werden kann. In dem positiven Bereich ist die Präzessionsfrequenz des Blochvektors kleiner als die „Klappfrequenz“ des Vektors $\vec{\Delta}$, um den er im semiklassischen Bild präzediert (vgl. Abb. 2.2) und dadurch die Zeitentwicklung diabatisch. Auf der Konturlinie sind beide Frequenzen gerade gleich groß. Das **untere** Bild zeigt den in [47] vorgeschlagenen Adiabazitätsparameter ζ (Gln. 4.1), der ein nahezu identisches Verhalten zeigt.

der Form

$$\delta_{\text{St}}(x) = -2\pi \frac{1}{2} \alpha |\mathbf{E}(x)|^2 \quad (4.5)$$

mit der relativen Polarisierbarkeit der Zustände $63\text{P}_{3/2}$ und $61\text{D}_{5/2}$ ($|M_J| = 1/2$ hat eine negative Polarisierbarkeit [146]) von

$$\alpha = 1.3 \text{ GHz}/(\text{V}/\text{cm})^2. \quad (4.6)$$

Die Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(x)$ wird als exponentieller Abfall angenommen [20]

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(0) e^{-x/l} \quad (4.7)$$

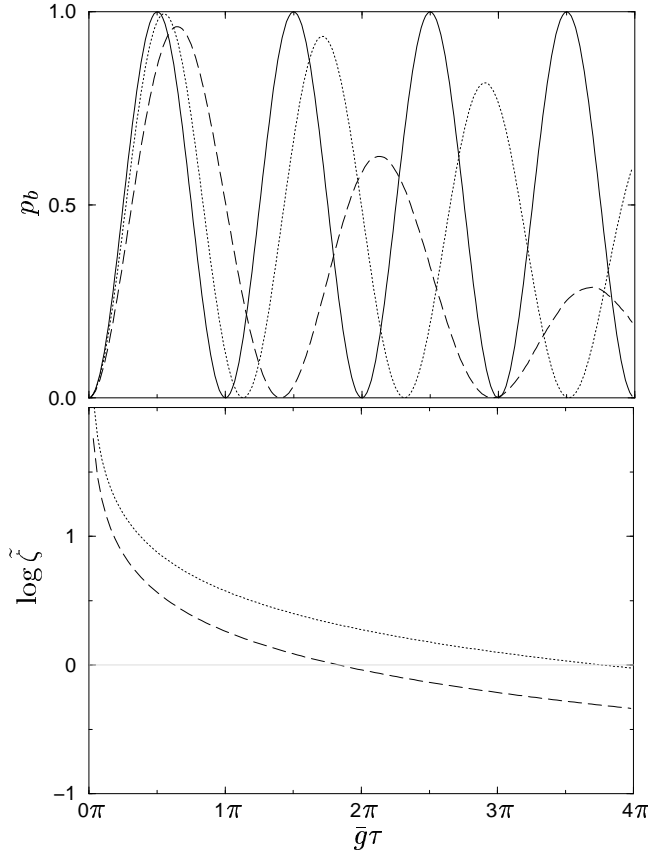


Abbildung 4.3: Adiabaticität bei Vakuum-rabioszillationen ($T = 0$ K). **Bild oben:** Die durchgezogene Linie zeigt die Grundzustandswahrscheinlichkeit des Atoms als Funktion der skalierten Wechselwirkungszeit mit dem Vakuum-Feldzustand ohne Einfluß von elektrischen Feldern. Werden Streufelder mitberücksichtigt, verkleinert sich zum einen die Rabifrequenz wegen einer reduzierten effektiven Wechselwirkungszeit (Randbereiche werden durch starke Verstimmung „abgeschnitten“), zum anderen erhöht sich die Adiabaticität mit der Wechselwirkungszeit, was eine Verringerung der Umbesetzung zur Folge hat. ($l = 1.0$ mm \cdots , $l = 1.5$ mm $- -$) **Bild unten** zeigt den zugehörigen Verlauf des Adiabaticitätsparameters.

und die Feldstärke im Bereich der Koppellöcher mit $E(0) = 300$ mV/cm abgeschätzt [64], was eine maximale Starkverstimmung von $\bar{\delta}_{\text{St}} = -3.7 \cdot 10^8$ rad/s verursacht. Somit *sieht* das mit einer Geschwindigkeit v durch den Resonator fliegende Rubidiumatom eine zeitabhängige Niveaushiftung und Atom-Feld-Verstimmung der Form

$$\begin{aligned}\omega_A &\rightarrow \omega_A(t) = \omega_A + \bar{\delta}_{\text{St}} e^{-2tv/l} \\ \delta_{\text{AF}} &\rightarrow \delta_{\text{AF}}(t) = \delta_{\text{AF}} + \bar{\delta}_{\text{St}} e^{-2tv/l}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Nimmt man nun als Anfangszustand $|a, n\rangle$ an, können die beiden Adiabaticitätsparameter berechnet werden. Man erhält

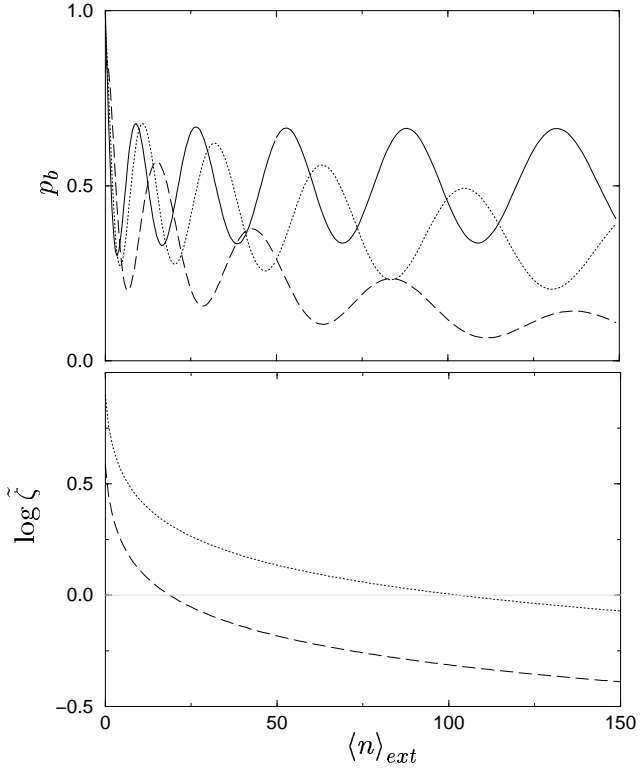
$$\begin{aligned}\zeta &= 2v \text{Sup} \left| \frac{\delta_{\text{AF}}(t)}{\Delta_n^2(t)} \left[\frac{1}{l} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2L} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \right|, \\ \tilde{\zeta} &= 2v\pi\bar{g}\sqrt{n+1} \text{Sup} \left| \frac{\delta_{\text{AF}}(t)}{\Delta_n^3(t)} \left[\frac{1}{l} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2L} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \right|,\end{aligned}\quad (4.9)$$

wobei die Resonatorlänge L eingeführt wurde und für die Energieskala ΔE aus Gln. 4.1 der Wert der mittleren n -Photonen *Dressed-State*-Aufspaltung $\hbar\pi\bar{g}/2\sqrt{n+1}$ eingesetzt wurde. Die Proportionalitäten beider Adiabaticitätsparameter zu der Photonenzahl n und der Wechselwirkungszeit τ ist gegeben durch

$$\zeta \propto \tilde{\zeta} \propto v \propto \tau^{-1} \propto 1/\sqrt{n}.\quad (4.10)$$

Das Verhalten dieser Parameter ist in Abb. 4.2 als Funktion der mittleren Photonenzahl und der skalierten Wechselwirkungszeit aufgetragen. Offensichtlich zeigen beide Parameter einen

Abbildung 4.4: Adiabaticizität bei externer Mikrowellen-Einstrahlung. Im **oberen Bild** ist die atomare Besetzungswahrscheinlichkeit für den unteren Zustand bei fester Wechselwirkungszeit ($g\tau = \pi/2$) gegen die eingestrahlte Intensität aufgetragen. Wobei die Skalierung $\langle n \rangle_{ext} = 4|f|^2/\Gamma^2$, die stationäre mittlere Photonenzahl, verwendet wurde. Die durchgezogene Linie zeigt den diabatischen Verlauf ohne Streufelder nach Gl. 3.26. ($l = 1.0$ mm \cdots , $l = 1.5$ mm $- -$, $T = 0$ K)



sehr ähnlichen Verlauf, so daß im Nachhinein die anschauliche semiklassische Überlegung gerechtfertigt wird.

4.3 Einfluß der Adiabaticizität auf die Atom-Feld-Dynamik

Nach den theoretischen Überlegungen besteht nun kaum noch ein Zweifel, daß die Emission des Atoms in die Resonatormode für sehr große Wechselwirkungszeiten und/oder hohe Feldstärken aufgrund von Adiabaticizität unterbunden wird. Wobei hier zu beachten ist, daß die Emission bei einem stark getriebenen atomaren Übergang prinzipiell auch durch ein drittes, zu diesem Übergang verstimmtes, Energieniveau unterdrückt werden kann. Diese sogenannte AC-Stark-Verschiebung wird dann relevant, wenn die Rabifrequenz in der Größenordnung der Verstimmung liegt. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten EAM-Übergang ($63P_{3/2} \leftrightarrow 61D_{5/2}$) befindet sich allerdings das nächste elektronische Niveau ($61D_{3/2}$) 50 MHz unter dem $61D_{5/2}$ -Zustand und bewirkt erst ab Photonenzahlen von 10^6 eine relevante Verschiebung in der Größenordnung des EAM-Übergangsbreite von 50 kHz. Da die folgenden Simulationen mit viel kleineren Photonenzahlen arbeiten, kann dieser Effekt vernachlässigt werden.

Die Auswirkungen der Adiabaticizität auf die Rabioszillationen und auf die Atomstatistik bei externer Einstrahlung werden in den Abbildungen 4.3 und 4.4 dargestellt.

Man kann also festhalten, daß statische elektrische Felder im Bereich der Resonatorkopplöffel auch bei Inversionsmessungen am Atom mitberücksichtigt werden müssen. Dabei kann als Maß der Verfälschung der Adiabaticizitätsparameter $\tilde{\zeta}$ verwendet werden. In den gewählten Beispielen hat sich gezeigt, daß für Werte $\log \tilde{\zeta} > 0.5$ quasi-diabatisches Verhalten angenommen werden kann, für Werte kleiner -0.5 hingegen quasi-adiabatisches.

Kapitel 5

Phasendiffusion beim Ein-Atom-Maser

Vergleicht man die Lichteigenschaften einer Glühlampe mit denen eines Lasers, so muß man der Glühlampe zunächst eine schlechtere räumliche und zeitliche Kohärenz attestieren. Doch selbst wenn man mittels eines Monochromators die Kohärenz verbessern würde, könnte man immer noch die Glühlampe aufgrund ihrer hohen Intensitätsfluktuationen identifizieren, da sich die Lichtfelder bekanntlich in ihrer Photonenzahlstatistik unterscheiden.

Während die Photonenzahlschwankungen der thermischen Lichtquelle, wie im Falle der Glühlampe, mit stärker werdender Intensität zunehmen, da die Null-Photonen-Wahrscheinlichkeit bei der hier vorliegenden Boltzmannstatistik stets am höchsten ist, ist das emittierte Licht eines Lasers intensitätsstabilisiert. Die Photonenzahlstatistik ist gemäß einer Poissonstatistik um ihren Mittelwert zentriert. Je stärker die Lasermode angeregt ist, desto kleiner werden die relativen Intensitätsschwankungen. Da diese Eigenschaft als eine Folge der stimulierten Emission gesehen werden kann, tritt sie speziell auch bei dem EAM auf.

Im Gegensatz dazu kann aber die Phase des Laserfeldes frei diffundieren, so daß sie, einmal präpariert, langsam aus dem *Takt* kommen kann. Dies hätte zur Folge, daß im Ensemblemittel die Phase bzw. die mittlere Feldstärke zerfallen würde, ohne daß dies bei den Einzelrealisationen zwangsläufig der Fall sein müßte. Da dieser Prozeß den einzig relevanten Teil beim (idealisierten) Laser darstellt, der die Monochromie stört, ist er folglich auch hauptverantwortlich für die endliche spektrale Linienbreite. In der Tat stellt man fest, daß die über die Fokker-Planck-Gleichung definierte Phasendiffusionskonstante identisch mit der Linienbreite des Lasers ist.

5.1 Der Begriff Phasendiffusion

Zunächst stellt sich die Frage, inwieweit man im Zusammenhang mit der Felddynamik von einem Phasendiffusionsverhalten sprechen kann. Der Begriff der Diffusion suggeriert einen Zusammenhang zu einer entsprechenden Diffusionsgleichung. Tatsächlich gibt es in der Lasertheorie einen engen Zusammenhang zwischen der Mastergleichung der Dichtematrix des Feldzustands und einer Fokker-Planck-Gleichung für die äquivalente Zustandsbeschreibung im Phasenraum [8, 10, 19, 28, 34]. Dazu stellt man den Felddichteoperator

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (5.1)$$

als Überlagerung von Projektionsoperatoren auf den kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ dar (α bezeichnet die komplexe Amplitude des Zustand im Phasenraum), setzt dies in die Mastergleichung

ein und erhält direkt durch Koeffizientenvergleich eine Fokker-Planck-Gleichung für $P(\alpha)$, der sogenannten Glauber-Sudarshan-Phasenraumverteilung.

Beschränkt man sich auf Feldzustände, deren Intensitäten dem stationären Wert entsprechen und wählt die Polarkoordinaten r, ϕ als Phasenraumvariablen, so erhält man eine Fokker-Planck-Gleichung vom Typ

$$\frac{\partial P(re^{i\phi})}{\partial t} = -\frac{D}{2} \frac{\partial^2 P(re^{i\phi})}{\partial \phi^2}. \quad (5.2)$$

Das ist aber genau die Diffusionsgleichung eines Teilchens, das frei auf einem Kreis diffundieren kann. Im Fall des elektromagnetischen Feldes handelt es sich natürlich um den Feldstärkevektor, dessen Länge konstant bleibt, die Phase hingegen frei diffundieren kann. Die charakteristische Zeitkonstante für diesen Prozeß wird als Phasendiffusionskonstante D bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun schnell den Zusammenhang zur Linienbreite herstellen. Als mögliche Definition des Spektrums wird das Leistungsspektrum der Form

$$S(\omega) = \left| \int_0^\infty \langle E(t) \rangle e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (5.3)$$

verwendet. Diese Definition setzt voraus, daß das Feld zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem phasenausgezeichneten Zustand mit $\langle E \rangle \neq 0$ präpariert wurde. Für stationäre Felder $\langle E \rangle = 0$ muß man auf andere Definitionen des Spektrums, wie z.B. die Fouriertransformierte der Amplitudenkorrelation, zurückgegriffen werden [8, 10].

Da die mittlere Feldstärke $\langle E \rangle$ proportional zum Realteil des Mittelwertes des Vernichtungsoperators $\langle a \rangle$ ist, kann man sich auf die Berechnung von $\langle a(t) \rangle$ beschränken und erhält mit Gln. 5.2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a(t) \rangle &= \iint r dr d\phi re^{i(\phi + \omega_F t)} \dot{P}(r, \phi) \\ &= \iint r dr d\phi re^{i(\phi + \omega_F t)} \left(-\frac{D}{2} \frac{\partial^2 P(r, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \\ &= -\left(\frac{D}{2} - i\omega_F \right) \langle a(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung für die mittlere Feldstärke $\langle E(0) \rangle$, erhält man als Zeitverhalten einen modulierten exponentiellen Zerfall, dessen Fouriertransformierte

$$S(\omega) = \frac{|\langle E(0) \rangle|^2}{(\omega - \omega_F)^2 + 1/4D^2} \quad (5.5)$$

eine Lorentzkurve mit voller Breite auf halber Höhe (**FWHM**) von D ergibt.

Die Linienbreite des Leistungsspektrums ist also identisch mit der Phasendiffusionskonstante, wenn die Felddynamik durch eine Gleichung vom Typ Gln. 5.2 beschrieben werden kann.

5.2 Besonderheiten des Ein-Atom-Masers

Die EAM-Theorie unterscheidet sich von der Lasertheorie insbesondere darin, daß der EAM-Betrieb auf der Wechselwirkung von einzelnen Atomen beruht, deren Wechselwirkungszeit τ fest eingestellt wird und groß gegenüber der Rabiperiode sein kann.

Das hat zu Folge, daß zum einen keine Fokker-Planck-Gleichung mehr aufgestellt werden kann, die nur Ortsableitungen bis zur 2. Ordnung enthält, was hier natürlich die Verwendung des Begriffs der Phasendiffusion fraglich erscheinen läßt [67]. Um diese begriffliche Spitzfindigkeit nicht zu weit zu treiben und um in Einklang mit der Literatur zu bleiben, soll der Begriff der Phasendiffusion hier weiterverwendet und mit der spektralen Linienbreite des EAM-Feldes gleichgesetzt werden.

Zum anderen entpuppt sich das Zeitverhalten der mittleren E-Feldstärke in manchen EAM-Parameterregimen im Vergleich zu dem oben angenommenen einfachen exponentiellen Zerfall, als komplizierterer Verlauf. Wie im letzten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt wird, können tatsächlich mehrere Zeitkonstanten simultan den Zerfall bestimmen. In solchen Fällen erhält man nicht-lorentzförmige Spektren, die genau genommen nicht mehr durch eine Zahl (Linienbreite) und Form (Lorentz) charakterisiert werden können. Da sie in der vorliegenden Arbeit eher die Ausnahme bilden, wird die Definition der FWHM auf diese Fälle dahingegen verallgemeinert, daß sie die größtmögliche spektrale Breite auf halber Höhe bezüglich des absoluten Maximums bezeichnet.

5.3 Hochfeldnäherung der Phasendiffusionskonstante

Bevor nun die exakte Linienbreite berechnet wird, konzentriert sich dieser Teil auf die physikalischen Mechanismen, die zur Linienbreite bzw. Phasendiffusion beim EAM führen. Dabei wird aus einfachen Überlegungen heraus ein Hochfeldnäherungsausdruck abgeleitet, der bereits in [86, 91, 92, 103] zu finden ist, hier jedoch eine anschaulichere Interpretation erfährt.

Die Tatsache, daß das Feld sowohl in Wechselwirkung mit einem thermischen Bad steht, als auch von einem Atomstrahl gepumpt wird, und beide im Feld keine Kohärenzen aufbauen können, legt die Vermutung nahe, daß diese Wechselwirkungsprozesse auch zum Phasenaustausch des Feldzustands beitragen und die Linienbreite als Summe dieser Bestandteile geschrieben werden kann

$$D = D_{\text{th}} + D_{\text{A}}. \quad (5.6)$$

5.3.1 Thermischer Anteil

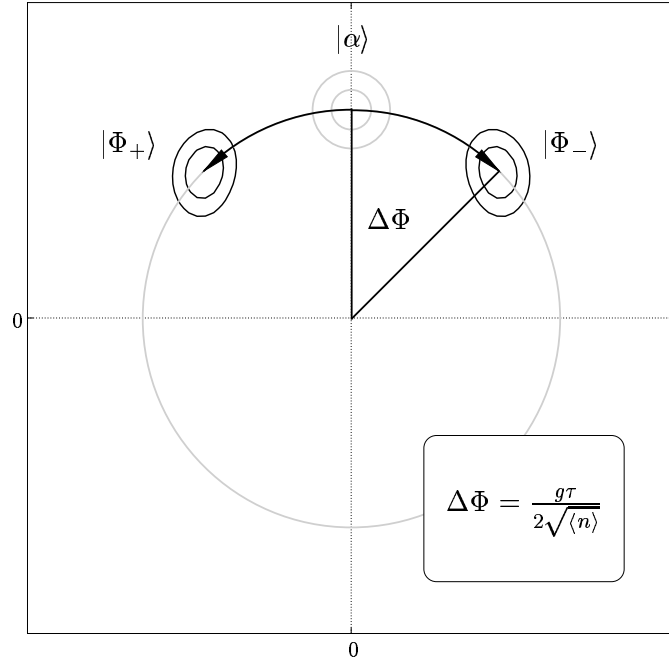
Ist die Feldmode an ein thermisches Bad gekoppelt, relaxiert jeder Anfangszustand mit der charakteristischen Zeit Γ^{-1} gegen den thermischen Zustand mit einer mittleren Photonenzahl n_{th} . Über das Fluktuations-Dissipations-Theorem ist aber eine Dämpfung stets auch mit Fluktuationen in den Feldvariablen verbunden, die tatsächlich bei der Fokker-Planck-Gleichung des (thermisch) gedämpften harmonischen Oszillators als Phasendiffusionskonstante sichtbar werden [14, 28]

$$\frac{\partial P(r, \phi)}{\partial t} = (\dots) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 - s + 2n_{\text{th}})}{4 \langle n \rangle} \frac{\partial^2 P(r, \phi)}{\partial \phi^2}. \quad (5.7)$$

Ist also der gedämpfte harmonische Oszillator durch einen weiteren (rauschfreien) Pumpmechanismus auf die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ stabilisiert, beträgt die Linienbreite der ausgeführten erzwungenen Schwingung

$$D_{\text{th}} = \frac{\Gamma(1 - s + 2n_{\text{th}})}{4 \langle n \rangle}. \quad (5.8)$$

Abbildung 5.1: *Auswirkung der Atom-Feld-Wechselwirkung auf einen ursprünglich kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Als Wechselwirkungszeit wurde $1/4$ der Revivalzeit gewählt. Als direkte Folge der Dressed-States-Bildung während der Wechselwirkung, splittet der Feldzustand in zwei um $\pm\Delta\phi$ phasenverschobene (näherungsweise) kohärente Zustände auf. Die genaue Überlagerung beider Phasen hängt von der verwendeten Messung am Atom ab (siehe Text).*



Dabei ist s der Ordnungsparameter der Feldoperatoren, der je nach Wahl einer speziellen Phasenraumfunktion die Werte $s = 0$ (Wignerfunktion), $s = 1$ (P-Funktion) und $s = -1$ (Q-Funktion) annehmen kann¹.

5.3.2 Die Phasenkicks der Atom-Feld-Wechselwirkung

Wie oben bereits erwähnt lässt sich für den atomaren Anteil keine (einfache) Fokker-Planck-Gleichung mehr aufstellen und daraus die Phasendiffusionskonstante entnehmen. Allerdings kann man direkt aus dem Jaynes-Cummings-Modell die Auswirkung der Wechselwirkung auf den Feldzustand berechnen. Sei im Resonator ein kohärenter Zustand reeller Amplitude präpariert, so lautet der kombinierte (nicht normierte) Atom-Feld-Zustand nach einer Zeit τ [42, 104]

$$|\alpha_0\rangle|a\rangle \xrightarrow{\tau} \left(e^{i\Delta\phi}|a\rangle - |b\rangle \right) |\Phi_+(\tau)\rangle + \left(e^{-i\Delta\phi}|a\rangle + |b\rangle \right) |\Phi_-(\tau)\rangle. \quad (5.9)$$

Die beiden Feldzustände können für kleine Wechselwirkungszeiten (gegenüber der Revivalzeit) als um

$$\Delta\phi = \frac{g\tau}{2\sqrt{\langle n \rangle}} \quad (5.10)$$

phasenverschobene kohärente Zustände der Form

$$|\Phi_{\pm}(\tau)\rangle = e^{\pm i\langle n \rangle \Delta\phi} |\alpha_0 e^{\pm i\Delta\phi}\rangle \quad (5.11)$$

¹Genauer gesagt können alle $s \in [-1, 1]$ verwendet werden. Die hier angeführten sind allerdings die am häufigsten verwendeten.

geschrieben werden. Mit jeder Atom-Feld-Wechselwirkung wird also auch ein Phasenshift auf das Feld übertragen². Die Frage, ob der Feldzustand nach der Wechselwirkung um die eine oder andere Phase verschoben wurde, oder ob der Feldzustand eine Überlagerung beider darstellt, kann nur in Zusammenhang mit einem bestimmten Meßschema beantwortet werden. Typische Beispiele dafür sind:³

- Das Atom wird in einer beliebigen Basis gemessen, die Informationen jedoch verworfen. Diese Meßmethode entspricht dem *Spuren* über die Atomzustände, welches das Feld in einer inkohärenten Überlagerung

$$\rho \stackrel{\Delta\Phi \ll 1}{\simeq} |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \quad (5.12)$$

hinterläßt.

- Bei einer Energiemessung am Atom wird der Feldzustand für kleine $\Delta\phi$ in „Schrödinger-Katzen“-Zustände projiziert. Das Vorzeichen der kohärenten Überlagerung ist durch das Meßresultat wie folgt gegeben

$$|\psi\rangle \stackrel{\Delta\Phi \ll 1}{\simeq} \begin{cases} |\Phi_+\rangle + |\Phi_-\rangle & \text{Atom im Zustand } |a\rangle \\ |\Phi_+\rangle - |\Phi_-\rangle & \text{Atom im Zustand } |b\rangle \end{cases} \quad (5.13)$$

- Mißt man die Dipolphase des Atoms (Meßbasis $|a\rangle \pm |b\rangle$), wird für reelle Feldamplituden einer der beiden kohärenten Felder herausprojiziert.

$$|\psi\rangle \stackrel{\Delta\Phi \ll 1}{\simeq} \begin{cases} |\Phi_+\rangle & \text{Atom im Zustand } |a\rangle + |b\rangle \\ |\Phi_-\rangle & \text{Atom im Zustand } |a\rangle - |b\rangle \end{cases} \quad (5.14)$$

Es ist also bemerkenswert, daß die auf das Feld übertragenen Phasenkicks der Atom-Feld-Wechselwirkung sich je nach Meßmethode unterschiedlich auf die Dynamik des (individuellen) Feldzustands auswirken. Während die ersten beiden Verfahren ein zunehmendes Ausschmieren der Phase verursachen, kann man in Verbindung mit der letzten Methode von einem Random-Walk der Feldphase auf einem Kreis sprechen, da ein anfänglicher kohärenter Zustand wieder in einen phasenverschobenen kohärenten Zustand übergeht. Dabei muß natürlich nach jeder Wechselwirkung die Referenzphase der Dipolmessung derart verändert werden, daß der Feldzustand im Bezugssystem der Dipolphase eine reelle mittlere Phase aufweist.

In der Näherung kleiner $\Delta\phi$ kann man einen genäherten Phasendiffusionskoeffizienten angeben, indem man den *Sprungwinkel* in die Definition der Kramer-Moyal-Differentialgleichung einsetzt. Man erhält dann direkt die Schawlow-Townes-Linienbreite des Lasers [5, 10]

$$D_A \simeq \frac{\Delta\Phi^2}{\Delta t} = r \frac{(g\tau)^2}{4\langle n \rangle} \quad (5.15)$$

²Der Aufspaltungswinkel ist dabei linear zur Wechselwirkungszeit und eine direkte Folge der *Dressed-States*-Aufspaltung. Als alternative Ableitung dieses Winkels $\Delta\phi$ stelle man sich vor, daß zwei Überlagerungen von Fockzuständen gebildet werden, die um die gleiche mittlere Photonenzahl konzentriert seien. Das eine Wellenpaket $\sum w_n \exp\{i/\hbar E_+ t\}$ beinhalte jedoch die Energien der $|+\rangle$ -*Dressed-State*-Mannigfaltigkeit, das andere Wellenpaket $\sum w_n \exp\{i/\hbar E_- t\}$ die der $|-\rangle$. Durch entwickeln der Wurzelabhängigkeiten der Energien von n kann man schnell den Unterschied der Phasengeschwindigkeiten von $\Delta\omega = g/(2\sqrt{\langle n \rangle})$ berechnen.

³Die in der Aufzählung angeführten Feldzustände sind der Übersichtlichkeit halber nicht normiert.

Für größere $\Delta\Phi$ wird die Periodizität der Phasenverschiebungen immer wichtiger und die Abweichungen von der Schawlow-Townes-Breite immer größer. In diesem Fall kann die Linienbreite über den Zerfall von $\langle a(t) \rangle$ analytisch berechnet werden (siehe Anhang D). Die Rechnung, in die allein der Phasenverschiebungswinkel $\Delta\Phi$ eingeht, führt auf

$$D_A = 4r \sin^2 \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right) = 4r \sin^2 \left(\frac{g\tau}{4\sqrt{\langle n \rangle}} \right), \quad (5.16)$$

ein Ergebnis das schon früher aus der Mastergleichung abgeleitet wurde, hier aber den physikalischen Ursprung des *Phasenkicks* deutlicher sichtbar macht.

5.4 Exakte Analyse der Phasendiffusionskonstante

Die Hochfeldnäherung kann zwar den groben Verlauf der Phasendiffusionskonstante erfassen und erlaubt eine physikalische Interpretation, kann allerdings Effekte die mit den nicht-lorentzförmigen Spektren zusammenhängen nicht erklären. Ferner zeigt sich, daß Abweichungen in dem hier verwendeten Parameterregime, speziell wegen der kleinen mittleren Photonenzahlen, mehrere Prozent betragen können. Deswegen wird in diesem Kapitel die exakte Formel für die Linienbreite abgeleitet und numerisch berechnet. Es wird sich herausstellen, daß der Zerfall der mittleren E-Feldstärke gerade bei höheren EAM-Schwellen von mehreren Zeitkonstanten bestimmt wird.

Die folgende Rechnung beruht auf der Eigenvektorzerlegung der ersten Nebendiagonale der Dichtematrix und verwendet möglichst konsequent eine Vektor- und Matrixschreibweise, die auch den Vorteil größerer Übersichtlichkeit mit sich bringt [92].

Zur Berechnung des Spektrums gemäß Gln. 5.3 muß die Zeitentwicklung der mittleren E-Feldstärke berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle &\propto \operatorname{Re} \langle a(t) \rangle \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \rho_n^{(1)}(t) e^{i\omega_F t} \\ &= \operatorname{Re} \mathbf{Z} \mathbf{x}^{(1)}(t) e^{i\omega_F t}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dabei wurde in der zweiten Zeile vom Heisenbergbild in das Wechselwirkungsbild übergegangen und die Vektoren \mathbf{Z} und $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ mit den Komponenten

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}]_n &= \sqrt{n+1} \\ [\mathbf{x}^{(1)}]_n &= \rho_n^{(1)} \equiv \langle n | \rho | n+1 \rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

eingeführt⁴. Die Zeitentwicklung der ersten Nebendiagonale kann nun mit Hilfe von Abschnitt 2.7 gelöst werden. Dabei wird der Vektor \mathbf{x} in den (rechts-seitigen) Eigenvektoren \mathbf{r}_l der Form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_l c_l \mathbf{r}_l e^{-\lambda_l t} \quad (5.19)$$

⁴Da sich in diesem Abschnitt alle Gleichungen auf die 1.Nebendiagonale der Dichtematrix beziehen wird der Index (1) im folgenden unterdrückt

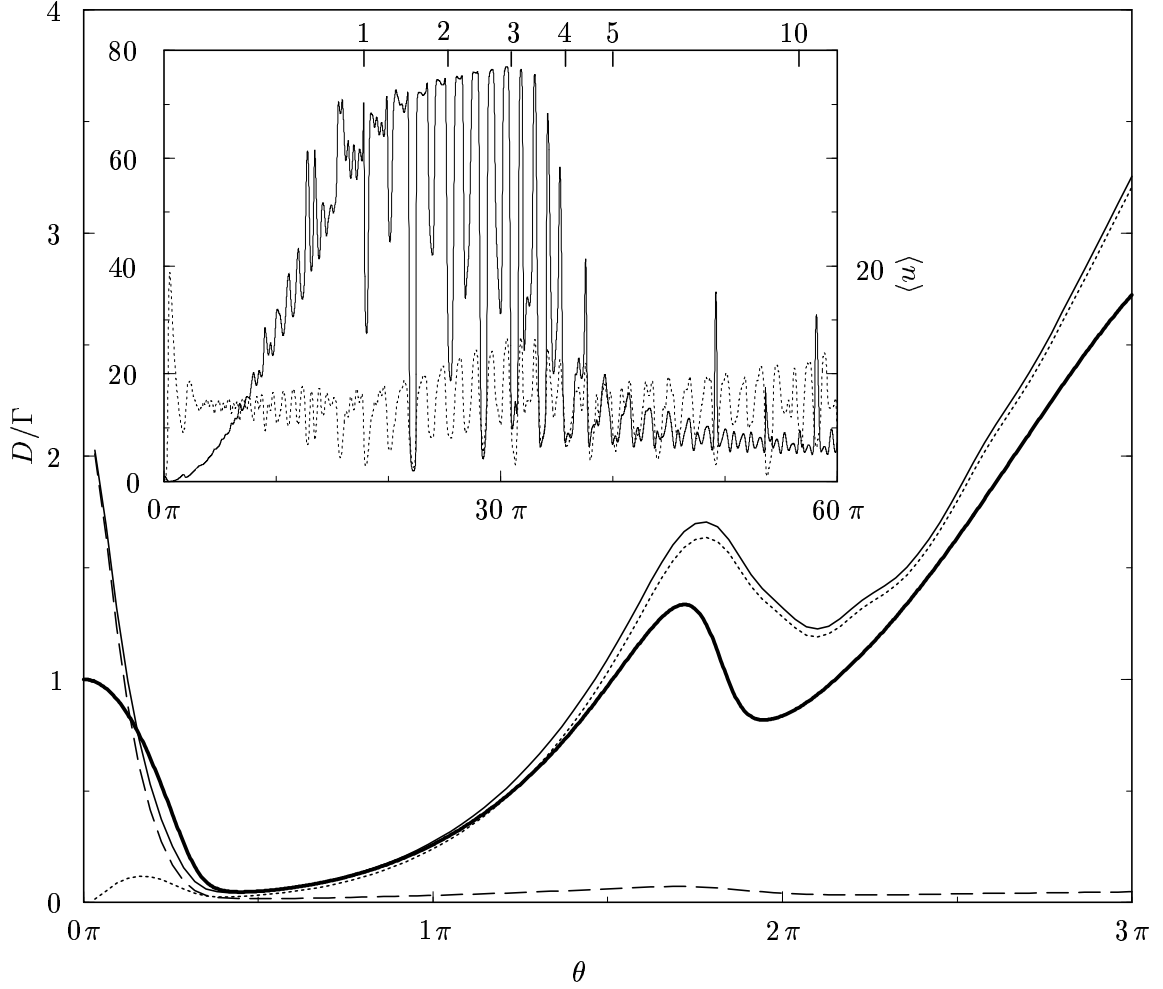


Abbildung 5.2: EAM-Linienbreite als Funktion des Pumpparameters. Die exakte Linienbreite (—) wurde nach Gln. 5.22 numerisch berechnet. Als Anfangszustand wurde ein kohärenter Zustand mit gleicher mittlerer Photonenzahl wie der entsprechende stationäre EAM-Zustand gewählt. Der Hochfeldnäherungsausdruck (---) aus Gln. 5.6 zeigt für das hier gewählte $N_{ex} = 20$ oberhalb der zweiten EAM-Schwelle ($\theta > 1.5\pi$) stärkere Abweichungen, spiegelt aber dennoch das charakteristische Verhalten von D recht gut wieder. Dabei wurden der thermische (···, D_A , Gln. 5.16) und der atomare Anteil (—, D_{th} , Gln. 5.8) getrennt eingezeichnet. Offensichtlich sind ab der ersten Schwelle hauptsächlich die durch die Atom-Feld-Wechselwirkung verursachten Phasenkicks für die EAM-Linienbreite verantwortlich. Die Linienbreite wird in diesem Bereich noch gut von der Schawlow-Townes-Formel wiedergegeben und lässt sich mit dem Verlauf der mittleren Photonenzahl (Abb. 2.3) gut verstehen.

Im kleineren Bild ist die exakte Linienbreite und die mittlere Photonenzahl (gestrichelt) für einen größeren θ -Bereich dargestellt. Die hauptsächlichen Merkmale sind: Erstens das quadratische Ansteigen gemäß der Schawlow-Townes-Formel ($\theta < 10\pi$). Zweitens wird durch die \sin^2 -Abhängigkeit die Reduzierung der Linienbreite für große Wechselwirkungszeiten ($\theta > 30\pi$) berücksichtigt, da ab dieser Stelle der Phasenkick größer π wird und deshalb der atomare Anteil wieder abnimmt. Das Minimum wird dann bei $\Delta\phi \simeq 2\pi$ erreicht, bei dem sich die beiden aufgesplitteten Feldanteile $|\Phi_{\pm}\rangle$ wieder an ihrer Ursprungsposition treffen ($\theta \simeq 60\pi$). Drittens die tiefen Einbrüche, bei denen die Bedingung $\Delta\phi = 2\pi \rightarrow \theta/\pi = 4\sqrt{\langle n \rangle N_{ex}}$ für ein entsprechendes $\langle n \rangle$ (θ) (Zahlen an oberer x-Achse) gerade erfüllt ist.

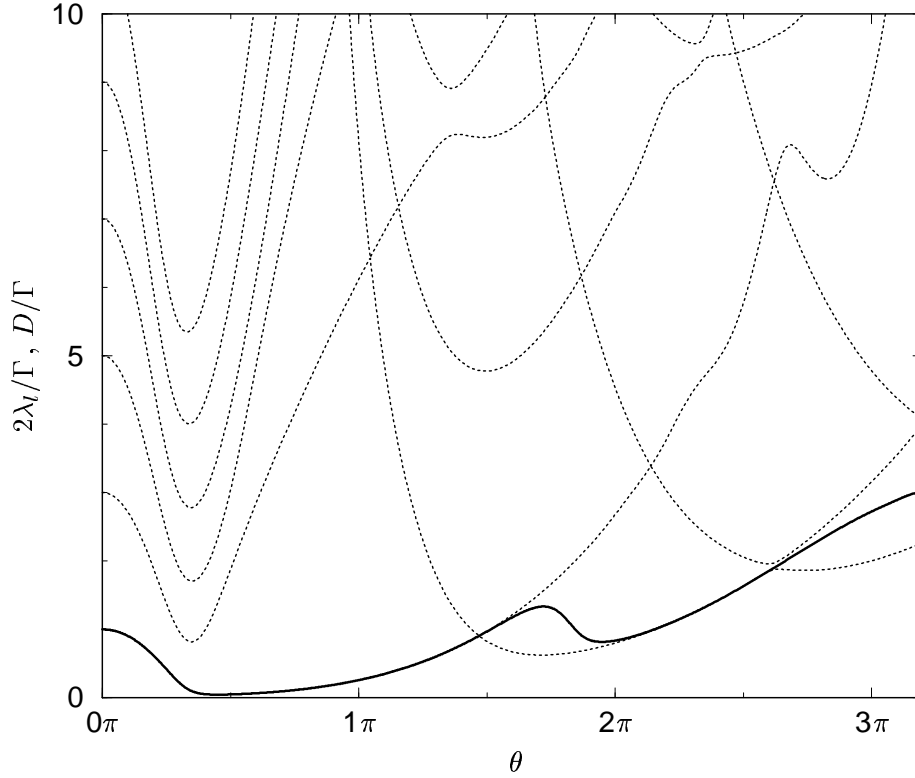


Abbildung 5.3: Eigenwertspektrum (···) und Linienbreite (—) der EAM-Strahlung als Funktion des Pumpparameters $\theta = g\tau\sqrt{N_{ex}}$ ($N_{ex} = 20$, $n_{th} = 0.15$). In dem Bereich kleiner θ -Werte ($< 1.5\pi$) ist die Linienbreite durch den kleinsten Eigenwert gegeben, springt aber noch vor der zweiten Schwelle auf den nächsten Eigenwert über. Bei der zweiten Schwelle selbst ($\theta \sim 1.8\pi$) liegt D zwischen diesen Eigenwerten. In diesem bistabilen Bereich ist der Zerfall der E-Feldstärke durch zwei Zeitkonstanten bestimmt, die den beiden Maxima der Photonenzustatistik zugeordnet werden können (Abb. 2.4).

entwickelt. Die Koeffizienten c_l sind dann durch das Skalarprodukt

$$c_l = \mathbf{l}_l \mathbf{x}(0) \quad (5.20)$$

bestimmt. Zusammen mit Gln. 5.17 findet man die gesuchte Zeitentwicklung der mittleren E-Feldstärke, ausgedrückt in Eigenwerten der Zeitentwicklungsmatrix

$$\langle \mathbf{E}(t) \rangle \propto \text{Re} \sum_l \underbrace{c_l \mathbf{z}_l}_{K_l^{(E)}} e^{(i\omega_F - \lambda_l)t}. \quad (5.21)$$

Gerade in dieser Gleichung erkennt man, daß der Zerfall von $\langle \mathbf{E} \rangle$ nur dann einen einfachen exponentiellen Verlauf zeigt, wenn \mathbf{x} quasi Eigenvektor zu \mathbf{M} ist und dessen Eigenwert allein die Dynamik bestimmt. Alle anderen Eigenwerte werden durch die nahezu verschwindenden Koeffizienten unterdrückt. Im allgemeinen Fall ist die Zeitentwicklung allerdings als Summe über exponentielle Zerfälle mit unterschiedlichen Zerfallskonstanten gegeben, dessen einzelne Summanden mit $K_l^{(E)}$ gewichtet sind.

Das Leistungsspektrum kann dann mit diesen Gewichten $K_l^{(E)}$ und den zugehörigen

Eigenwerten λ_l nach Gln. 5.3 folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \mathcal{N} \left| \sum_l \left(\frac{K_l^{(E)}}{i(\omega - \omega_F) + \lambda_l} + \frac{K_l^{(E)*}}{i(\omega + \omega_F) + \lambda_l^*} \right) \right|^2 \\
 &\stackrel{\omega_F \gg 1}{\cong} \mathcal{N} \sum_{l=0} \sum_{l' \geq l} (2 - \delta_{ll'}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_l^{(E)} K_{l'}^{(E)*}}{(\omega - \omega_F)^2 + \lambda_l \lambda_{l'}^* - i(\omega - \omega_F)(\lambda_l - \lambda_{l'}^*)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Die Normierungskonstante \mathcal{N} skaliert das Spektrum in dieser Arbeit derart, daß das absolute Maximum den Wert 1 annimmt.

Dieses Spektrum ist nur für den Fall eines relevanten Eigenwertes lorentzförmig, für die anderen Fälle erhält man kompliziertere Spektren, die z.B. *Dips* in der Mitte aufweisen können. Siehe dazu [89, 94].

In der Abb. 5.3 wird der Verlauf der Linienbreite mit dem Eigenwertspektrum in einem typischen Parameterregime verglichen. Man erkennt, daß die Dynamik nicht immer durch den kleinsten Eigenwert bestimmt ist und daß es Bereiche wie die zweite EAM-Schwelle gibt, bei denen ein zweiter Eigenwert relevant wird.

Kapitel 6

Meßmethoden der Ein-Atom-Maser Phasendiffusion

Will man eine Eigenschaft des EAM-Feldes wie die Phasendiffusion messen, muß man zunächst einen theoretischen Zusammenhang zwischen einer Atomobservablen nach der Wechselwirkung und der entsprechenden Feldgröße herstellen. Ein direktes Detektieren der EAM-Strahlung ist bekanntermaßen (technisch) nicht möglich, da die aus den Koppellöchern des Resonators entweichende Leistung für einen Nachweis viel zu schwach ist. Ferner würde eine erhöhte Auskopplung schnell das gesamte gespeicherte Feld zerstören, da in dem Resonator nur mittlere Photonenzahlen von bis 200 experimentell erzeugt werden können. Als einzige Möglichkeit, Informationen über den Feldzustand zu gewinnen, bleibt der atomare Zustand nach der Wechselwirkung, oder genauer, die Detektor *Klick*-Statistik. Die Atome spielen also für das EAM-Feld die Doppelrolle des Pumpmediums und des Meßinstrumentes.

Kann man nun mit dem Standard EAM-Aufbau, bei dem die Energie der Atome gemessen wird, nachdem sie im oberen Zustand in den Resonator injiziert wurden, *phasensensitiv* messen? Leider wird diese Frage durch die folgende Formel für die Emissionswahrscheinlichkeit des Atoms (=Wahrscheinlichkeit für die Messung des unteren Zustands $|b\rangle$) verneint. Denn es gilt

$$p_b = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} \sin^2(g\tau\sqrt{n+1}). \quad (6.1)$$

Die Energiemessungen am Atom hängen offensichtlich nur von den Diagonalelementen der Felddichtematrix in Fockdarstellung ab, die gleichbedeutend mit der Photonenzustatsstatistik des Feldes ist und insbesondere keine Photonenzustatskohärenzen beinhaltet. Bei dieser Art von Messung sind die Atome sozusagen für Phaseneigenschaften des Feldes blind und *spüren* nur die Feldintensitätseigenschaften.

So kann z.B. aus obiger Formel für p_b bei Variation der Wechselwirkungszeit auf die Photonenzustatsstatistik zurückgerechnet werden [68], oder der Grad der Intensitätsrauschunterdrückung aufgrund von Atom-Atom-Korrelationen berechnet und gemessen werden [57, 95].

In den folgenden zwei Abschnitten werden Möglichkeiten diskutiert, in welcher Art die Experimente modifiziert werden müssen, um phasensensitiv messen zu können. Dabei werden im ersten Teil kurz die älteren Vorschläge skizziert, die alle auf der Messung der atomaren Dipolphase basieren. Die im Experiment leichter zu realisierenden neuen Vorschläge werden dann im zweiten Teil vorgestellt.

6.1 Bisherige Vorschläge phasensensitiver Messungen

Die zentrale Erkenntnis der ersten Meßmethode beruht auf der Tatsache, daß die Dipolphase des atomaren Zwei-Niveau-Systems nach der Wechselwirkung mit einer bestimmten Feldphase korreliert ist. Schafft man es nun von der Energiemessung ($|a\rangle, |b\rangle$) auf eine Dipolphasenmessung ($2^{-1/2}\{|a\rangle \pm |b\rangle\}$) überzugehen, könnte die Phasensymmetrie des Feldes spontan, also nicht stationär, gebrochen werden, weil die Messung der einen Dipolphase den Feldzustand in die dazu korrelierte Vorzugsphase projizieren würde. Oder umgekehrt ausgedrückt steigt die Wahrscheinlichkeit für die Messung einer bestimmten Dipolphase, wenn das Feld die entsprechende Phasenauszeichnung hatte. Experimentell kann man diese phasensensitive Meßbasis dadurch erhalten, indem man die Atome hinter dem Resonator derart mit einem klassischen Mikrowellenfeld wechselwirken läßt, daß der atomare Blochvektor einen $\pi/2$ -Puls erfährt. [86, 88, 90]

Die Phasendiffusionsmessung erfolgt in zwei Schritten:

- Da der stationäre EAM-Zustand im Sinne eines Ensemblemittelwertes *phasenlos* ist, wird ihm im ersten Schritt eine Vorzugsphase aufgeprägt. Das kann entweder durch eine direkte schwache Mikrowelleneinkopplung, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, geschehen, oder durch eine geringe kohärente Beimischung des unteren EAM-Niveaus vor der Wechselwirkung [50, 71].
- Im zweiten Schritt wird das gerade beschriebene *Phasen-Seeden* abgeschaltet, worauf die Feldphase zu diffundieren beginnt. Es stellt sich heraus, daß dann die Wahrscheinlichkeiten der beiden Dipolphasen annähernd wie die mittlere Feldstärke *zerfallen*. Dabei ist die charakteristische Zerfallskonstante identisch mit der Phasendiffusionskonstante.

Aufgrund der Tatsache, daß bereits die spezielle Detektion der atomaren Dipolphase die Phasensymmetrie des Feldes bricht, kann man auch auf die anfängliche Präparation der Feldphase verzichten, und stellt fest, daß dann die zustandsabhängigen Atom-Atom-Korrelationen Informationen über die Linienbreite des Feldes enthalten [100].

So elegant diese Meßmethode erscheinen mag, so schwierig ist jedoch auch die experimentelle Realisierung. Der Grund dafür ist die implizit in den Vorschlägen enthaltene Forderung nach Erhaltung der Feld-Atom-Kohärenz, d.h. die atomare Dipolphase muß sich im Ensemble zur Feldphase kohärent entwickeln. Dies ist aber für Rydbergatome mit ihren extremen Polarisierbarkeiten nur sehr schwer zu erzielen. Bei den gegenwärtigen Experimenten beträgt der Phasenshift der Dipolphase bei einem Atom das um nur $1/10$ mm höher den Resonator verläßt einige Tausend 2π , da gerade im Bereich der Koppellöcher inhomogene statische Felder nahezu unvermeidbar sind [65, 156]. Mathematisch ausgedrückt, entwickelt sich eine kohärente atomare Überlagerung im Bereich des Resonatoraustrittsloches in ein statistisches Gemisch seiner Energieeigenzustände. Bei einer anschließenden Dipolphasenmessung ist das Wissen der korrelierten Feldphase somit verloren gegangen.

Das ist der Hauptgrund für die Entwicklung robusterer phasensensitiver Meßmethoden in dieser Arbeit. Es hat sich gezeigt, daß mit der im folgenden vorgestellten „Methode der verschobenen Felder“ auch mit reinen Energiemessungen am Atom phasensensitive Feldinformationen erhalten werden können [104, 136, 137].

6.2 Methode der verschobenen Felder

Um die Frage nach dem Informationsgehalt eines bestimmten Meßverfahrens zu klären, bietet sich eine alternative Definition des Dichteoperators an. Während die verbreitete Methode den Dichteoperator durch seine Dynamik gemäß einer Mastergleichung in Verbindung mit einem postulierten Anfangszustand beschreibt, gibt es eine zweite Möglichkeit die allein auf der aus einer speziellen Messung gewonnenen Information basiert und unter dem Namen „Methode der maximalen Entropie“ bekannt ist [24, 105, 121].

Dabei wird der Dichteoperator des Systems als derjenige definiert, der bei zugrunde gelegten Meßdaten der wahrscheinlichste ist. Diese Definition ist natürlich insbesondere dann interessant, wenn eine unvollständige Informationsmenge über den Systemzustand vorliegt und ein Zustand aus vielen möglichen ausgewählt werden muß.

Zur Determination des so definierten Dichteoperators legt man zunächst ein Set von linear unabhängigen Meßoperatoren¹

$$\mathcal{O}_\nu \quad ; \quad \nu = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

zugrunde, deren Mittelwerte

$$\langle \mathcal{O}_\nu \rangle = O_\nu \quad (6.3)$$

experimentell bestimmt werden sollen und die sogenannte *Beobachtungsebene* festlegen. Dadurch wird die Menge der (normierten) Dichteoperatoren auf die Menge derjenigen eingeschränkt, für die gilt

$$\text{Tr} \left(\rho_{\{\mathcal{O}\}} \mathcal{O}_\nu \right) = O_\nu. \quad (6.4)$$

Offensichtlich können bei einer unvollständigen Beobachtungsebene im Allgemeinen noch viele verschiedene Dichteoperatoren obige Relation erfüllen. Das Prinzip der „maximalen Entropie“ fordert aber in diesen Fällen, daß derjenige Dichteoperator zu wählen ist, der die geringsten Annahmen über den Zustand enthält, also der Zustand maximaler Unkenntnis, mit der Eigenschaft

$$\eta_{\max} \equiv \max \eta[\rho_{\{\mathcal{O}\}}]. \quad (6.5)$$

Dabei kann als Maß der Unkenntnis

$$\eta[\rho] = -\text{Tr} \left(\rho \ln \rho \right) \quad (6.6)$$

zur Quantifizierung herangezogen werden, wobei $\eta = 0$ einen reinen Zustand auszeichnet und Werte größer Null einen zunehmend gemischteren Zustand.

Der charakteristische Wert η_{\max} hängt nur von der gewählten Beobachtungsebene ab und ist identisch mit der Entropie des Systems. Die Eigenschaften aus den Gleichungen 6.4 und 6.5 führen auf den gesuchten Dichteoperator

$$\rho_{\{\mathcal{O}\}} = \frac{1}{Z_{\{\mathcal{O}\}}} \exp \left(- \sum_\nu \lambda_\nu \mathcal{O}_\nu \right) \quad (6.7)$$

¹Im Gegensatz zu [121] werden die Meßoperatoren mit \mathcal{O}_ν anstatt mit G_ν bezeichnet und sind hier durchgängig im Heisenbergbild angegeben.

mit

$$Z_{\{\mathcal{O}\}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Tr} \left[\exp\left(-\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \mathcal{O}_{\nu}\right) \right], \quad (6.8)$$

und die impliziten Bestimmungsgleichungen für die Lagrange-Multiplikatoren λ_n

$$\mathcal{O}_{\nu} = \text{Tr} \left[\rho_{\{\mathcal{O}\}} \mathcal{O}_{\nu} \right] = -\frac{\partial}{\partial \lambda_{\nu}} \ln Z_{\{\mathcal{O}\}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (6.9)$$

Mit dieser informationstheoretischen Definition des Systemzustands kann die Frage erneut aufgegriffen werden, welche Zustände des EAM-Feldes mit welcher Beobachtungsebene vollständig erfaßt werden können.

Betrachtet man zunächst die Beobachtungsebene der typischen EAM-Experimente, bei denen die Atome im oberen Zustand in den Resonator injiziert werden und nach einer Wechselwirkungszeit τ im oberen oder unteren Zustand gemessen werden. Wählt man als Meßgröße die Wahrscheinlichkeit das Atom im unteren Zustand zu messen, erhält man

$$\mathcal{O}_{\nu}^{(b)} = \sin^2 \left(g\tau \sqrt{a^{\dagger}a + 1} \right). \quad (6.10)$$

Diese Beobachtungsebene kann als eine Linearkombination von Photonenzahlmessungen $|\nu\rangle\langle\nu|$ dargestellt werden und ist somit äquivalent zu der Beobachtungsebene $\mathcal{O}_{\nu} = |\nu\rangle\langle\nu|$, woraus nach Gln. 6.7 folgt, daß der mit $\mathcal{O}^{(b)}$ gemessene Systemzustand in Fockdarstellung stets diagonal sein muß. Insbesondere werden alle Zustände mit gleicher Photonenzahl, aber möglicherweise unterschiedlichen Phaseneigenschaften, nach dem Prinzip der maximalen Entropie durch den gleichen Dichteoperator beschrieben und können folglich auf dieser Beobachtungsebene *nicht* unterschieden werden. Man spricht hier auch von einer *phasen-insensitiven* Beobachtungsebene. Zur Bewertung der Vollständigkeit dieser Messung kann man zwei Fälle unterscheiden

- Der Systemzustand wurde im reinen Zustand präpariert. Dann ist die gewählte Beobachtungsebene nur für den Fall eines Fockzustands vollständig.
- Der Systemzustand wurde unvollständig präpariert, so daß nur die Photonenzahlverteilung bekannt ist. Dann fügt die Beobachtungsebene $\mathcal{O}^{(b)}$ kein *zusätzliches* Unwissen hinzu.

Die Idee der Methode der verschobenen Felder besteht nun darin, den Photonenzahloperator, der für die Unvollständigkeit der Messung verantwortlich ist, gegen einen um γ verschobenen Photonenzahloperator der Form $(a^{\dagger}a)^{\Rightarrow} = (a^{\dagger} + \gamma^*)(a + \gamma)$ auszutauschen. Man erhält die neue Beobachtungsebene

$$\mathcal{O}_{\nu}^{(\gamma)} = \sin^2 \left(g\tau \sqrt{(a^{\dagger} + \gamma^*)(a + \gamma) + 1} \right). \quad (6.11)$$

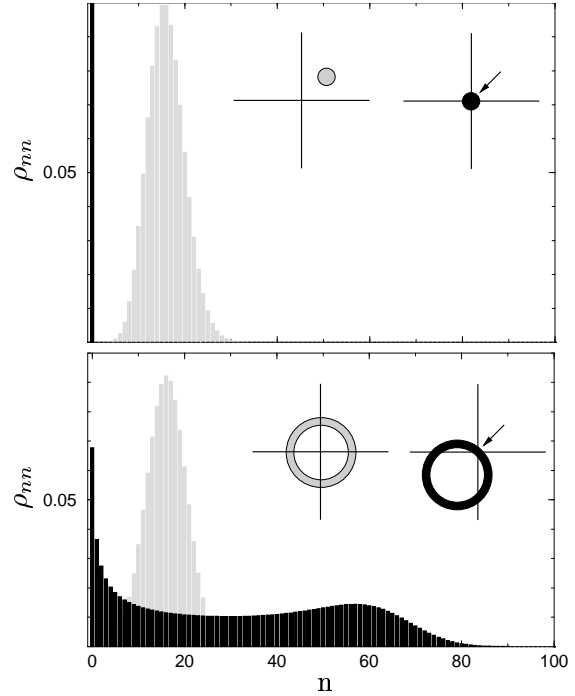
Man erkennt schnell, daß diese Meßoperatoren den Wahrscheinlichkeiten entsprechen, das Atom im unteren Zustand zu messen, nachdem es mit einem um die komplexe Amplitude γ im Phasenraum verschobenen Feldzustand gewechselwirkt hat, denn es gilt

$$\begin{aligned} p_b(\gamma) &= \text{Tr} \left\{ \underbrace{D(\gamma) \rho D^{\dagger}(\gamma)}_{\rho^{\rightarrow}} \sin^2(g\tau \sqrt{a^{\dagger}a + 1}) \right\} \\ &= \text{Tr} \left[\rho \sin^2(g\tau \sqrt{(a^{\dagger} + \gamma^*)(a + \gamma) + 1}) \right] \\ &= \langle \mathcal{O}^{(\gamma)} \rangle. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Abbildung 6.1: *Photonenstatistiken und Phasenraumdarstellungen (im Bild-In-Set) von zwei Zuständen gleicher Photonenstatistik (grau), aber unterschiedlichen Phaseneigenschaften. Da eine einfache Energiemessung am Atom nach der Wechselwirkung nur von der Photonenstatistik des Feldes abhängt, sind diese beiden Zustände ununterscheidbar.*

Verschiebt man die Zustände jedoch im Phasenraum, erhält man unterschiedliche Photonenstatistiken (schwarz).

Die Zustandsverschiebung im Phasenraum wird damit zum Schlüssel einer phasen-sensitiven Beobachtungsebene trotz einfacher Atom-Energiemessungen.



Diese Beobachtungsebene ist nun äquivalent zu der Beobachtungsebene $(a^\dagger)^l a^k$ und repräsentiert daher für unendlich viele verschiedene γ_ν eine vollständige Meßbasis und eröffnet so die prinzipielle Möglichkeit alle denkbaren Feldeigenschaften auszulesen, obwohl am Atom selbst *phasen-insensitiv* gemessen wird.

Eine eher anschauliche Erklärung bietet die Phasenraumdarstellung in Abb. 6.1. Dort werden zwei Zustände mit gleicher Photonenstatistik, aber unterschiedlicher Phaseneigenschaft gegenübergestellt (grau dargestellt). Wie oben besprochen kann die Beobachtungsebene $\mathcal{O}^{(b)}$ diese Zustände nicht unterscheiden, da man gleiche Mittelwerte als Funktion der Wechselwirkungszeit findet (siehe punktierte Linien in Abb. 6.2). Um in der Sprache des Überlappformalismus [21, 27] zu sprechen, ist die Wahrscheinlichkeit n Photonen im Feld zu messen proportional zu dem Überlapp einer Kreisscheibe (Radius entspricht der Intensität von n Photonen, Fläche bei allen n gleich) mit dem entsprechenden Zustand. Natürlich mittelt diese Überlappfläche über den Winkel und die Schnittflächen der in Abb. 6.1 grau dargestellten Zustände ähneln sich stark.

Verschiebt man dagegen den Zustand im Phasenraum, so beginnen sich die Schnittflächen mit den n -Photonen Ringen zu unterscheiden und erzeugen so verschiedene Photonenstatistiken (schwarz gezeichnet). Dementsprechend sind nun die Erwartungswerte der phasensensitiven Beobachtungsebene $\mathcal{O}^{(\gamma)}$ (im Bild 6.2 schwarz mit fester Verschiebung γ aufgetragen) unterschiedlich und ermöglichen die vollständige *Beobachtung* des Zustand. Im Prinzip lassen sich also in der $\mathcal{O}^{(\gamma)}$ -Meßbasis alle Feldeigenschaften messen. In Bezug auf eine Phasendiffusionsmessung stellt sich allerdings die Frage, wie die Verschiebungen gewählt werden müssen um möglichst effizient die Phasendiffusionskonstante bestimmen zu können. Mit genau dieser Frage wird sich der Rest dieses Kapitels auseinandersetzen.

Es werden zwei verschiedene Meßverfahren vorgestellt. Beim ersten müssen die Emissionswahrscheinlichkeiten bei einem auf einem Kreis verschobenen Zustand gemessen werden. Durch eine anschließende Fourierzerlegung können die Beiträge von jeder beliebigen

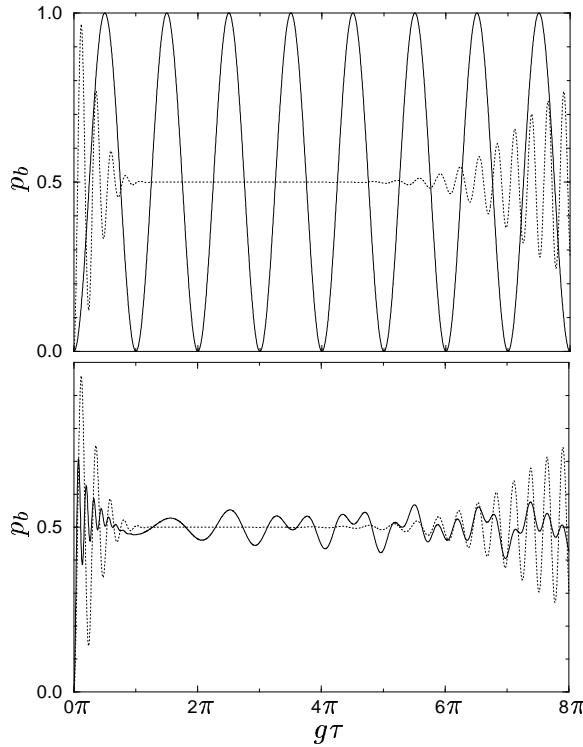


Abbildung 6.2: Rabioszillationen der in Abb. 6.1 dargestellten Zustände. Der phasen-
ausgezeichnete Zustand ist im Bild oben
dargestellt, der phasenlose im unteren Bild.
Die punktierte Linie zeigt den Mittelwert
der phasen-insensitiven Meßbasis $O^{(b)}$ (=Emissi-
onswahrscheinlichkeit), bei der man den typi-
schen Verlauf von Kollaps und Revival erkennen
kann. Die beiden Kurven sind nahezu identisch.
Die durchgezogene Linie zeigt die Emissions-
wahrscheinlichkeit nach der Verschiebung bei-
der Zustände im Phasenraum, also $\langle O^{(\gamma)} \rangle$.
Die Unterschiede sind nun deutlich zu er-
kennen: Während der obere Zustand Vakuum-
Rabioszillationen zeigt, erzeugt die breite Pho-
tonenstatistik des phasenlosen verschobenen Zu-
stands ein deutlich stärkeres Auswaschen der
Rabioszillationen.

Dichtematrix- Nebendiagonale in Fockdarstellung separiert werden [136].

Die zweite Methode stellt einen direkten Zusammenhang zwischen einer speziellen Verschiebung und einem Phasenraumpunkt der charakteristischen Funktion der Wigner-
verteilung (kurz: charakteristische Wignerfunktion) her. Aus der Steigung dieser
Quasiwahrscheinlichkeits-Verteilung im Ursprung kann dann die mittlere Feldstärke be-
rechnet werden und somit ideal der Prozeß der Phasendiffusion beobachtet werden [137].

6.2.1 Verschiebungen auf einem Kreis

Die Beobachtungsebene $\mathcal{O}^{(\gamma)}$, die in der Methode der verschobenen Felder benutzt wird, erlaubt also, wie oben beschrieben, eine vollständige Rekonstruktion des Quantenzustands im Resonator. Alle Feldeigenschaften können damit im Prinzip gemessen werden. Bei der Messung der Phasendiffusion reicht allerdings die Information über die erste Nebendiagonale der Dichtematrix in Fockdarstellung aus. Thema dieses Abschnittes wird es sein, allein diese notwendigen Informationen aus einer speziellen Meßreihe zu extrahieren.

Beginnt man mit der expliziten Darstellung der Beobachtungsgröße $\langle \mathcal{O}_\nu^{(\gamma)} \rangle$ in Fockbasis, die gleich der Emissionswahrscheinlichkeit nach dem Verschieben des Feldzustand um die kohärente Amplitude $\gamma = \gamma_0 e^{i\phi}$ ist, erhält man gemäß Anhang C in kompakter Vektornotation

$$p_b(\gamma) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{k,0}) \mathbf{y}^{(k)} (\gamma_0) \mathbf{x}^{(k)} e^{ik\phi}. \quad (6.13)$$

Dabei enthält der $\mathbf{x}^{(k)}$ -Vektor die Matrixelemente der k -ten Dichtematrix-Nebendiagonale $\langle n | \rho | n + k \rangle$.

Offensichtlich hängt die Emissionswahrscheinlichkeit von allen Dichtematrixelementen $\langle n | \rho | n + k \rangle$ ab. Andererseits erkennt man, daß Gln. 6.13 eine Fourierreihe darstellt und deswegen eine *Filterung* der einzelnen Koeffizienten $\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)}$ mittels Fouriertransformation der Emissionswahrscheinlichkeit bezüglich des Verschiebungswinkels ermöglicht. Mißt man also $p_b(\gamma)$ für viele (zunächst noch unendlich viele) Winkel auf einem Kreis mit festem Radius γ_0 , so erhält man mit dem ersten Fourierkoeffizienten $\mathbf{y}^{(1)} \mathbf{x}^{(1)}$ eine Meßgröße, die nur noch von der ersten Nebendiagonale abhängt und somit die minimal nötige Information für eine Phasendiffusionsmessung enthält.

In Abb. 6.3 ist das konkrete Meßverfahren skizziert, das im wesentlichen aus drei Schritten besteht

- **Präparations-Phase.** Zu dem Anfangszeitpunkt $t' = 0$ wird ein phasenausgezeichneter Zustand erzeugt, der ungefähr die gleiche mittlere Photonenzahl haben soll wie der allein durch atomares Pumpen erzeugte stationäre EAM-Zustand. Im Prinzip können zwei verschiedene Methoden verwendet werden. Entweder das in Kapitel 3.2 beschriebene *Phasen-Seeden* des EAM-Feldes, oder das Einkoppeln einer klassischen Mikrowellenstrahlung ohne atomares Pumpen. Letztere Methode präpariert, wie in Kapitel 3.4 besprochen, einen kohärenten Zustand (oder bei Anwesenheit von thermischen Photonen einen verschobenen thermischen Zustand).
- **Phasendiffusions-Phase.** Nach dem Abschalten des externen Mikrowellenfeldes ist die Phasensymmetrie der Felddynamik wiederhergestellt und die Feldphase beginnt aufgrund des thermischen Rauschens und der durch die Atom-Feld-Wechselwirkung verursachten Phasen kicks, zu diffundieren. In dieser Phase klingt die präparierte mittlere E-Feldstärke quasi-exponentiell ab.
- **Phasensensitiv messen.** Nachdem die Feldphase eine Zeit $t' = t$ zerlaufen konnte, wird das erste Atom, nach einer Feldverschiebung um die Amplitude $\gamma_l = \gamma_0 e^{i\phi_l}$, gemessen. Dabei beschränkt man sich auf L verschiedene Winkel.

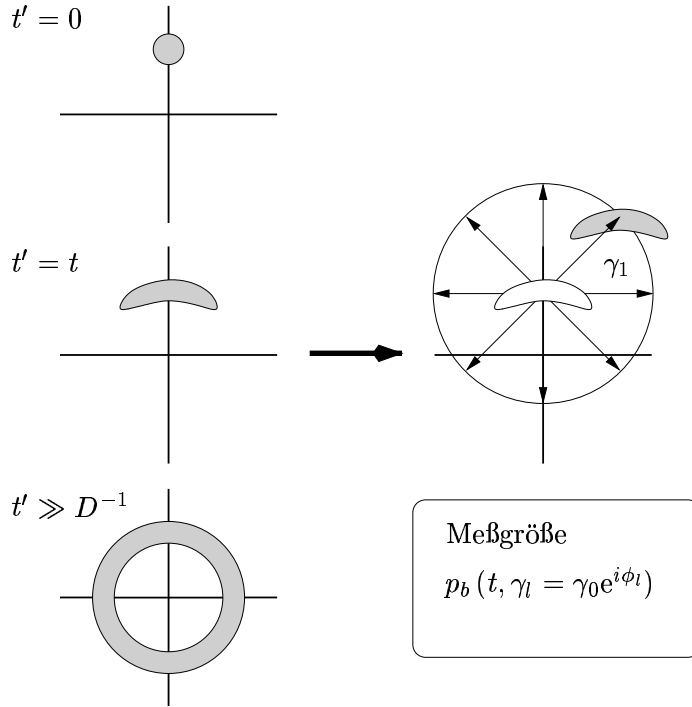


Abbildung 6.3: Meßablauf zur Messung der Phasendiffusion mittels Verschiebungen des Feldzustands auf einem Kreis im Phasenraum. Die drei wesentlichen Phasen sind: (1) Präparieren einer Feldphase mit Hilfe eines extern eingestrahlten Mikrowellenfeldes, (2) Abschalten der Mikrowelle (Feldphase beginnt zu diffundieren) und nach einer zu variierenden Relaxationszeit $t' = t$ (3) Messen der Emissionswahrscheinlichkeit des um γ verschobenen Feldzustands.

Die daraus gewonnenen Meßdaten p_b hängen also von der Relaxationszeit t und dem Verschiebungswinkel ab (Verschiebungsradius wird konstant gehalten).

Für diesen speziellen Meßablauf läßt sich die Meßgröße aus Gln. 6.13 wie folgt schreiben

$$p_b(\gamma_0, \phi_l, t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{k,0}) \mathbf{y}^{(k)}(\gamma_0) \mathbf{x}^{(k)}(t) e^{ik\phi_l} \quad (6.14)$$

mit den L diskreten Winkeleinstellungen

$$\phi_l = \frac{2\pi}{L} l. \quad (6.15)$$

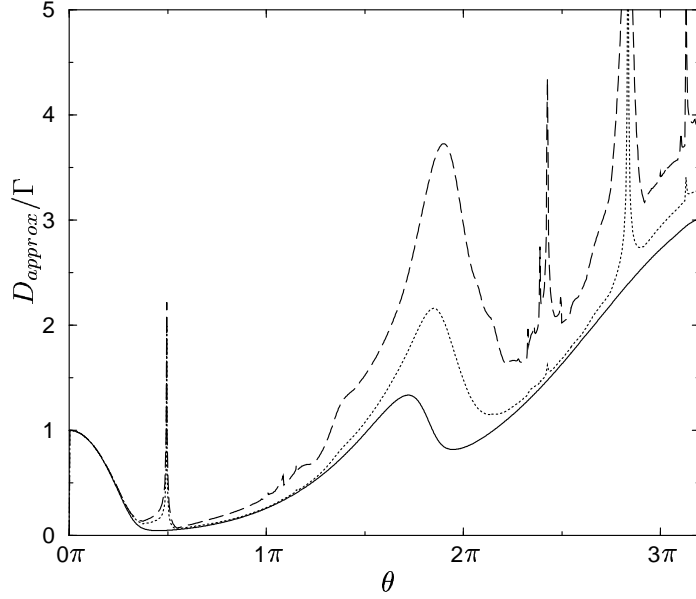
Die Wahl von diskreten Winkeleinstellungen ist natürlich für das Experiment unerlässlich, obwohl man zunächst annehmen würde, daß dies zu unvermeidbaren Fehlern bei der Filterung über die Fouriertransformation führt. Glücklicherweise kann man aber in der Praxis immer eine sinnvolle Beschränkung der Photonenzahl annehmen und erhält für die Anzahl der nötigen Winkel, die bei einer Photonenzahlbeschränkung auf N -Photonen ($(N+1)$ -dimensionaler Fockraum) eine fehlerfreie Filterung der Koeffizienten benötigt werden, folgende Relation

$$L \geq 2N + 1. \quad (6.16)$$

Ist diese Gleichung erfüllt, kann das Kroneckersymbol als

$$\delta_{kk'} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{i(k-k')\phi_l} \quad (6.17)$$

Abbildung 6.4: *Annähernde Bestimmung der Linienbreite aus der Messung zweier Phasenrelaxationszeiten gemäß Gln. 6.20. Die durchgezogene Linie entspricht der numerisch berechneten Linienbreite des E-Feldspektrums $S(\omega)$. Bei der gestrichelten Linie wurde die Linienbreite aufgrund zweier $q^{(1)}$ Messungen bei $t = 0$ und $t = 1/2\Gamma^{-1}$ berechnet. Dieser Zeitabstand wurde bei der punktierten Linie verdoppelt. Hier ist $D_{approx}(0, \Gamma^{-1})$ aufgetragen. Verwendete EAM-Parameter: $N_{ex} = 20$, $n_{th} = 0.15$ und $\gamma_0 = 1$.*



geschrieben werden und die Gln. 6.14 nach ihren Fourierkoeffizienten

$$q^{(k)}(\gamma_0, t) \equiv \mathbf{y}^{(k)}(\gamma_0) \mathbf{x}^{(k)}(t) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} p_g(\gamma_0, \phi_l, t) e^{-ik\phi_l}. \quad (6.18)$$

aufgelöst werden. Für die Messung der Phasendiffusion wird natürlich $k = 1$ zu setzen sein.

Zur Analyse der Zeitabhängigkeit dieser transformierten Meßgröße bietet sich eine Eigenvektorzerlegung an, die bereits in Abschnitt 2.7 behandelt wurde. Danach kann der Vektor der ersten Nebendiagonale $\mathbf{x}^{(1)}$ in rechts-seitigen Eigenvektoren entwickelt werden

$$\begin{aligned} q^{(1)}(\gamma_0, t) &= \mathbf{y}^{(1)}(\gamma_0) \mathbf{x}^{(1)}(t) \\ &= \sum_l \underbrace{c_l \mathbf{y}^{(1)}(\gamma_0) \mathbf{r}_l}_{K_l^{(q)}} e^{-\lambda_l t}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Für Regime der EAM-Dynamik, in der nur ein relevanter Eigenwert die Dynamik der 1.Nebendiagonale bestimmt, zeigt offensichtlich $q^{(1)}(t)$ den gleichen exponentiellen Zerfall wie die mittlere Feldstärke. Im Fourierbild entspricht das einer Lorentzkurve mit einer Halbwertsbreite von zwei mal der $1/e$ -Abfallszeit. In diesem Fall kann die spektrale Linienbreite aus zwei Meßpunkten $q^{(1)}(\gamma_0, 0)$ und $q^{(1)}(\gamma_0, t)$ durch

$$D_{approx}(0, t) = \frac{2}{t} \ln \frac{q^{(1)}(\gamma_0, 0)}{q^{(1)}(\gamma_0, t)} \quad (6.20)$$

abgeschätzt werden. Wie man in Abb. 6.4 erkennen kann, approximiert diese gemessene Linienbreite D_{approx} bei Zeitabständen der Größenordnung $t = 1/\Gamma$ die numerisch exakte $D^{(E)}$ bereits recht gut. Nur im Bereich der zweiten Schwelle, bei der zwei Eigenwerte miteinander konkurrieren, sind die Abweichungen etwas höher. In diesem Bereich haben die relevanten Eigenwerte durch die Gewichte $K^{(E)}$ bzw. $K^{(q)}$ unterschiedlichen Einfluß auf die tatsächliche Dynamik der mittleren Feldstärke bzw. der Meßgröße $q^{(1)}(t)$. Die großen

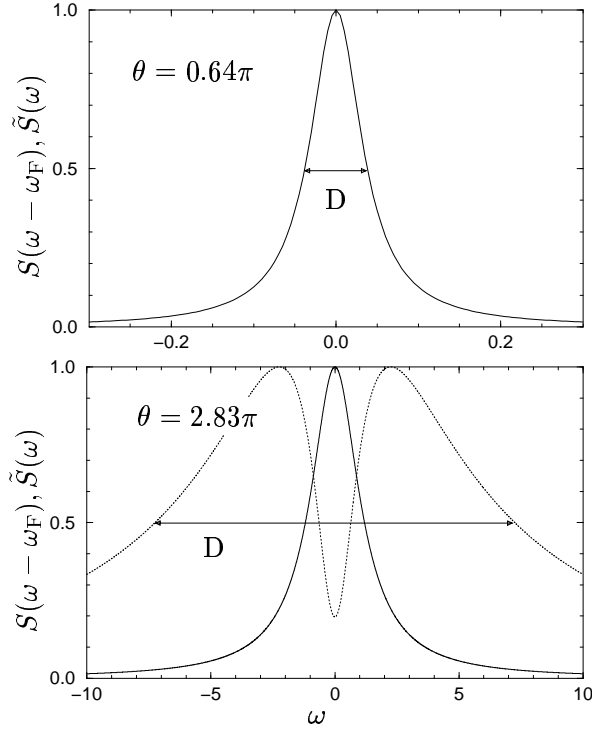


Abbildung 6.5: Gemessene und theoretische Spektren für zwei verschiedene Pumpparameter. Im **oberen Bild** sind die beiden Spektren nahezu ununterscheidbar. Beide Kurven zeigen ein Lorentzprofil mit $\text{FWHM}=D$. Das **untere Bild** zeigt einen kritischen Bereich bei $\theta = 2.83\pi$. Das gemessene Spektrum besteht aus einer Überlagerung zweier Lorentzkurven mit „Dip“ bei der Zentralfrequenz. Die Linienbreite D wird für diese Fälle als breiteste FWHM definiert. Die Kreisfrequenz wurde hier in Einheiten von Γ aufgetragen.

Abweichungen an den Stellen $\theta \sim 0.5\pi$ und $\theta \sim 2.8\pi$ können durch die (freie) Wahl des Verschiebungsradius γ_0 verschoben werden und stellen somit kein prinzipielles Problem der Methode dar. Die Ursache dafür wird weiter unten besprochen.

Noch überzeugendere Ergebnisse kann man erhalten, wenn man (bei genügend großem Meßintervall) direkt das analog zum Leistung-Spektrum definierte $q^{(1)}(t)$ -Spektrum $\tilde{S}(\omega)$ aus den Meßdaten berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\omega) &= \mathcal{N} \left| \int_0^\infty q(r_0, t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \\ &= \mathcal{N} \sum_{l=0} \sum_{l' \geq l} (2 - \delta_{ll'}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_l^{(q)} K_{l'}^{(q)*}}{\omega^2 + \lambda_l \lambda_{l'}^* - i\omega(\lambda_l - \lambda_{l'}^*)} \right\}.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Dieses Spektrum zeigt große Ähnlichkeit zum Spektrum $S(\omega)$ der elektrischen Feldstärke. Mit dem Unterschied, daß hier die Zentralfrequenz nicht die freie Feldfrequenz ω_F sondern 0 ist. Ferner treten die komplizierteren Gewichte $K^{(q)}$ auf, die, wie in Abb. 6.5 (unten) dargestellt, deutliche Abweichungen von dem Lorentzverlauf des Spektrums verursachen können. Das Zeitverhalten der Meßgröße $q^{(1)}$ wird dann von zwei oder mehreren Zeitkonstanten bestimmt. Um auch in diesen Fällen eine Linienbreite angeben zu können wurde das Maximum des Spektrums auf Eins normiert und dann die größtmögliche Breite auf halber Höhe (FWHM) verwendet. Die so (numerisch) ermittelte Breite wird als $D^{(q)}$ bezeichnet.

Glücklicherweise haben sich solche Fälle bei den hier verwendeten EAM-Parametern als sehr selten herausgestellt. In der überwiegenden Mehrheit sind die Spektren nahezu identisch (siehe Abb. 6.5 oben).

Diese geradezu verblüffende Übereinstimmung für weite Bereiche des Pumpparameters

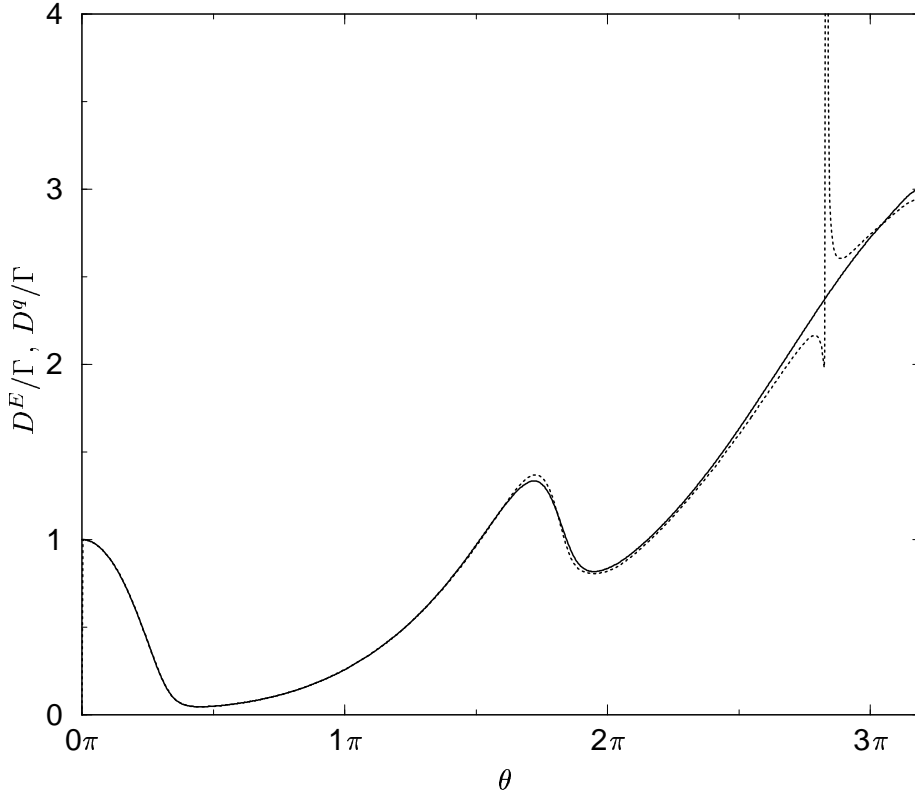


Abbildung 6.6: Vergleich von theoretischer Linienbreite $D^{(E)}$ (—) und gemessener Linienbreite $D^{(q)}$ (···). Bei der Bestimmung von $D^{(q)}$ wurde – im Gegensatz zu Abb. 6.4 – die Breite des Spektrums $\tilde{S}(\omega)$ numerisch ausgewertet.

wird in Abb. 6.6 belegt. Man erkennt, daß die gemessene Linienbreite $D^{(q)}$ und die numerisch exakt ermittelte Breite $D^{(E)}$ nahezu ununterscheidbar sind. Lediglich in den bereits oben erwähnten Bereichen $\theta \sim 0.5\pi$ und $\theta \sim 2.8\pi$ erkennt man immer noch größere Abweichungen (bei $\theta \sim 0.5\pi$ nur in der Vergrößerung der Abb. 6.7 zu erkennen).

Was sind nun die Gründe für diese *Ausrutscher* bei der Messung der Linienbreite? Wie schon angedeutet kommen dafür nur die Gewichte $K^{(q)}$ in Frage. Betrachtet man den Verlauf der zwei wichtigsten Gewichte, wie sie in Abb. 6.8 aufgetragen wurden, fällt auf, daß die kritischen Bereiche mit Nullstellen dieser $K^{(q)}$'s zusammenfallen. Ist also beispielsweise in dem Bereich um $\theta \sim 0.5\pi$ eine Zerfallskonstante (oder Eigenwert) für $\langle \mathbf{E}(t) \rangle$ dominant, so kann sie im Falle der Meßgröße $q^{(1)}(t)$ durch eine Nullstelle des zugehörigen Gewichts irrelevant werden. Die Dynamik muß dann auf die nächsthöheren Eigenwerte übergehen, oder $q^{(1)}(t)$ wird zeitunabhängig. Das mögliche Überspringen auf den nächsthöheren Eigenwert wird in Abb. 6.7 dargestellt. Diese *Störstellen* in der Messung können jedoch im Prinzip verschoben werden, da sie von der freien Wahl des festen Verschiebungsradius γ_0 abhängen (siehe Gln. 6.19) und stellen daher auch keinen wesentlichen Nachteil dieser Meßmethode dar. So könnte man nun, um die Ausrutscher in Abb. 6.6 zu beseitigen, für diese Pumpparameter einen anderen Verschiebungsradius wählen.

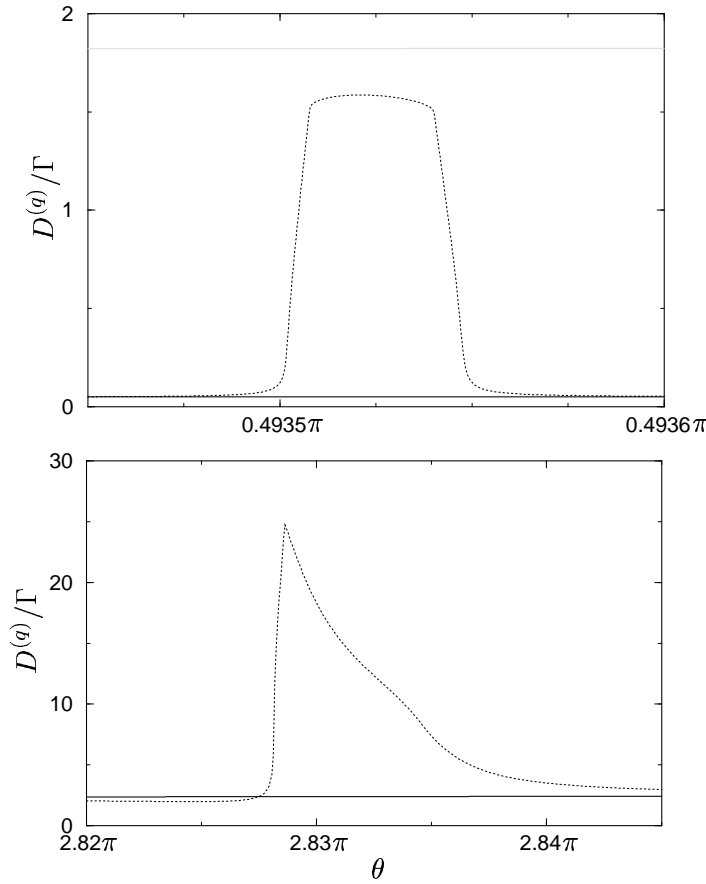
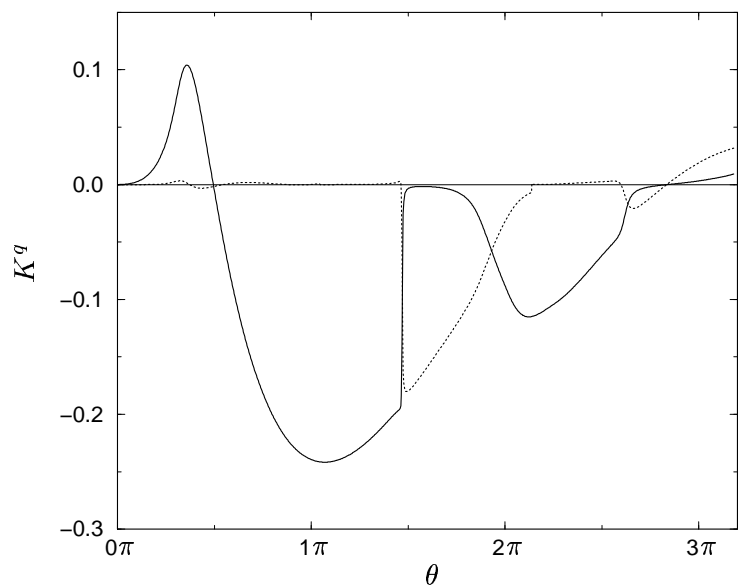


Abbildung 6.7: Vergrößerte „kritische“ Bereiche aus Abb. 6.6. Die gemessene Linienbreite $D^{(q)}$ (\cdots) zeigt große Abweichungen vom Eigenwert, der das Verhalten der mittleren E-Feldstärke bestimmt (—). Im oberen Bild wurde zusätzlich der nächstgrößte Eigenwert grau eingezeichnet, der für das Zeitverhalten der Meßgröße $q^{(1)}(t)$ in diesem Bereich verantwortlich ist. Die hier auftretenden kritischen θ -Werte können allerdings durch die Wahl eines anderen Verschiebungsradius γ_0 verschoben werden und stellen deshalb kein prinzipielles Problem dieser Meßmethode dar.

Abbildung 6.8: Gewichte zum kleinsten Eigenwert $K_0^{(q)}$ (—) und zweitkleinsten $K_1^{(q)}$ (\cdots) nach Gln. 6.19. Mit dem Verlauf dieser Kurven können die in Abb. 6.7 gezeigten Abweichungen fundierter begründet werden. Beispielsweise wird die Zeitentwicklung von $q^{(1)}(t)$ im Bereich bis $\theta \sim 1.5\pi$ vom kleinsten Eigenwert λ_0 dominiert, bis auf die Ausnahme der Nullstelle bei $\theta \sim 0.5\pi$. Dort gewinnt der zweite Eigenwert an Relevanz.



6.2.2 Messung der charakteristischen Funktion

Neben der im letzten Abschnitt beschriebenen eher indirekten Verknüpfung zwischen der Linienbreite des Feldzustands und der atomaren Observablen $q^{(1)}$ bzw. $\tilde{S}(\omega)$, gibt es im Zusammenhang mit der Methode der verschobenen Felder noch einen weiteren verblüffend direkten Zusammenhang. Wie im folgenden dargestellt wird, kann man unter speziellen Randbedingungen bereits mit **einer** Emissionswahrscheinlichkeit die augenblickliche mittlere Feldstärke im Resonator auslesen. Somit hat man hier die Möglichkeit den quasi-exponentiellen Zerfall, ausgehend von einer präparierten mittleren Feldstärke, direkt zu messen und daraus das Spektrum und die Phasendiffusionskonstante zu berechnen.

Kernstück der Methode ist der Zusammenhang zwischen der verschobenen Emissionswahrscheinlichkeit und einem Phasenraumpunkt der charakteristischen Wignerfunktion, der früher schon für ein etwas unterschiedliches physikalisches System (ein Atom wechselwirkt mit zwei Moden gleicher Frequenz) hergestellt werden konnte [107–109] und hier für EAM-Experimente zusammen mit Phasenraumverschiebungen modifiziert wird².

Bevor allerdings diese Ergebnisse präsentiert werden, sollen kurz die wesentlichen Merkmale der charakteristischen Funktion zusammengefaßt werden [14, 18, 33].

Die charakteristische Funktion $C(\beta = \beta_r + i\beta_i)$ ist eine Darstellungsmöglichkeit der Dichtematrix im (reziproken) Phasenraum. Genau wie die üblichen Phasenraumfunktionen enthält sie die gesamte Zustandsinformation und kann deswegen eindeutig in andere Darstellungen transformiert werden. Sie ist über Zusammenhänge zur Dichtematrix ρ bzw. Wignerfunktion $W(\alpha = \alpha_r + i\alpha_i)$ eines Zustands wie folgt definiert

$$\begin{aligned} C(\beta) &= \text{Tr} \left(D(\beta) \rho \right) \\ &= \int d^2\alpha e^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha} W(\alpha) \\ &= \int d\alpha_r \int d\alpha_i e^{-2i\beta_i\alpha_i + 2i\beta_r\alpha_r} W(\alpha_r, \alpha_i). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Besonders aus der letzten Gleichung geht hervor, daß die charakteristische Funktion die zweidimensionale Fouriertransformierte der Wignerfunktion ist.

Wie in der klassischen Statistik, können auch hier Mittelwerte über Ableitungen der charakteristischen Funktion im Punkt $\beta = \beta_r + i\beta_i = 0$ berechnet werden. Es gilt für die Mittelwerte symmetrisch geordneter *Leiter*-operatorenprodukte

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta} \right)^n \left(-\frac{\partial}{\partial\beta^*} \right)^m C(\beta) \Big|_{\beta=0} = \left\langle \left\{ (a^\dagger)^n a^m \right\}_{sym} \right\rangle \quad (6.23)$$

Den Mittelwert des Vernichtungsoperators a kann man damit zum Beispiel über die Steigungen des Real- und Imaginärteils der charakteristischen Funktion ($C = C_r + iC_i$) im Punkt Null berechnen.

$$\langle a \rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial\beta^*} \right) C(\beta) \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\beta_i} - i \frac{\partial}{\partial\beta_r} \right) C_i(\beta) \Big|_{\beta=0} \quad (6.24)$$

²In der Quantenoptik kann zu jeder s-parametrisierten Phasenraumverteilung eine zugehörige charakteristische Funktion definiert werden. In dieser Arbeit handelt es sich ausschließlich um die charakteristische Wignerfunktion mit s=0 (symmetrisch geordnete a^\dagger, a Produkte).

Dabei wurde die Tatsache verwendet, daß der Realteil der charakteristischen Funktion in der Umgebung von Null stets eine *Kuppe* aufweist und folglich erste Ableitungen dort verschwinden, da der Funktionswert $C(0) = 1$ durch die Normierung festgelegt ist und der (maximale) Wertebereich sich von -1 bis 1 erstreckt.

Zurück zum Zusammenhang zur Atomstatistik. Wie in [137] gezeigt wurde, kann die Inversion des Atoms nach Wechselwirkung mit einem um $\gamma = \gamma_0 e^{i\phi}$ verschobenen Zustand

$$p_a - p_b = 1 - 2p_b = \text{Tr} \left(\rho D^\dagger(\gamma) \cos \left(2g\tau \sqrt{a^\dagger a + 1} \right) D(\gamma) \right) \quad (6.25)$$

näherungsweise als *modulierte* charakteristische Funktion geschrieben werden. Dazu muß der Kosinusoperator in Exponentialoperatoren aufgespalten werden und der Wurzeloperator um die mittlere Photonenzahl des superponierten klassischen Feldes γ_0^2 entwickelt werden. Dies führt zu der Näherung

$$D^\dagger(\gamma) \cos \left(2g\tau \sqrt{a^\dagger a + 1} \right) D(\gamma) \cong \frac{1}{2} \left(e^{i2g\tau \sqrt{\gamma_0^2 + 1}} D(ig\tau \gamma / \gamma_0) + h.ad. \right). \quad (6.26)$$

Dabei wurde angenommen, daß die Emissionswahrscheinlichkeit in Gegenwart des verschobenen Zustands Kollaps- und Revivalstruktur zeigt, also

$$\gamma_0^2 \gg \langle a^\dagger a \rangle + 1 \quad (6.27)$$

gilt, und die Wechselwirkungszeit klein gegenüber dem ersten Revival gewählt wird

$$g\tau \ll \frac{\gamma_0}{\langle a^\dagger a \rangle + 1}. \quad (6.28)$$

Zusammen mit der Definition der charakteristischen Funktion 6.22 erhält man schließlich den gesuchten Zusammenhang (Heisenbergbild!)

$$\begin{aligned} 1 - 2p_b(\gamma, \tau) &\cong C_r(\beta) \cos \left(2g\tau \sqrt{\gamma_0^2 + 1} \right) \\ &\quad - C_i(\beta) \sin \left(2g\tau \sqrt{\gamma_0^2 + 1} \right) \\ &= \begin{cases} (-1)^n C_r(\beta) & ; \quad g\tau = \frac{n\pi}{2} \sqrt{\gamma_0^2 + 1}^{-1} \quad n \in \mathbb{N} \\ (-1)^{n+1} C_i(\beta) & ; \quad g\tau = \frac{(n+1/2)\pi}{2} \sqrt{\gamma_0^2 + 1}^{-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.29)$$

mit dem (reziproken) Phasenraumpunkt der charakteristischen Funktion

$$\beta = ig\tau e^{i\phi}. \quad (6.30)$$

Soll also ein bestimmter Phasenraumpunkt von $C(\beta)$ gemessen werden, determiniert die skalierte Wechselwirkungszeit $g\tau$ den Radius γ_0 und die Phase des Verschiebungspulses den Winkel $\phi + \pi/2$ von β . Auf diese Weise kann die gesamte charakteristische Funktion gemessen werden, indem man bei fester Verschiebungsamplitude γ_0 (hinreichend groß) den Verschiebungswinkel und die Wechselwirkungszeit variiert.

Zur Messung der Phasendiffusion bzw. der mittleren Feldstärke werden natürlich weniger Messungen benötigt, da nach Gln. 6.24 nur die Steigung im Ursprung zu bestimmen ist. Dies kann näherungsweise entweder durch Extrapolation der Meßwerte für $\tau \rightarrow 0$ oder durch Messung eines Punktes für ein kleinstmögliches τ und Bildung des Differenzenquotienten

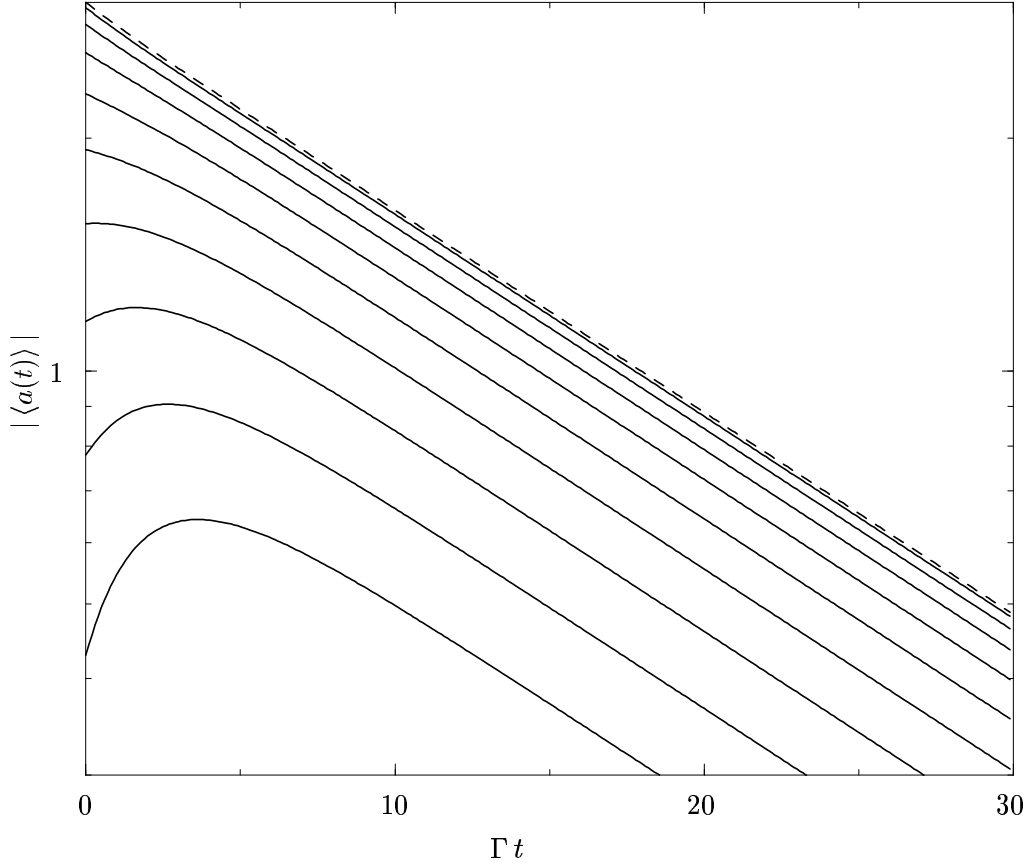


Abbildung 6.9: Vergleich zwischen gemessenem und theoretischem exponentiellen Abfall der mittleren Feldamplitude ausgehend von einem kohärenten Zustand $|\alpha = 3\rangle$, der sich zu einem stationären EAM-Zustand entwickelt ($N_{ex} = 9, n_{th} = 0.15, \theta = 1.5$).

Die über Gln. 6.31 berechneten Werte sind für $g\tau = 0.05$ (oberste Linie, —) bis $g\tau = 0.45$ (unterste Linie, —) in Schrittweiten von 0.05 aufgetragen und dem exakten Verlauf (---) gegenübergestellt.

erreicht werden. Bei letzterer Methode kann der bekannte Punkt im Ursprung $C(0) = 1 + i0$ mitverwendet werden. Mit dem Zusatzwissen der momentanen mittleren Feldphase (hier Null gesetzt) erhält man im rotierenden Bezugssystem

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &\propto \operatorname{Re} \langle a \rangle \\
 &\cong \frac{1}{2\epsilon} C_i(i\epsilon) \\
 &\cong \frac{1}{2\epsilon} (1 - 2p_b(\gamma_0, \epsilon/g)) .
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Die Wechselwirkungszeit $\tau = \epsilon/g$ unterliegt natürlich der Bedingung 6.29 für die Messung von C_i .

Damit sieht man, daß die Dynamik einer Phasendekohärenz, wie sie in Abb. 6.3 dargestellt wurde, nach dieser Methode mit dem Messen nur einer Emissionswahrscheinlichkeit für jede Relaxationszeit t erfaßt werden kann. Abb. 6.9 zeigt die aus dem Differenzenquotienten (Gln. 6.31) berechnete mittlere E-Feldstärke als Funktion der Relaxationszeit. Wie

das kleinste τ für eine gewünschte Genauigkeit gewählt werden muß, hängt von der mittleren Photonenzahl ab, da die charakteristische Funktion höhere Feldintensitäten als schnellere Oszillationen kodiert, was für die lineare Näherung im Ursprung kürzere Wechselwirkungszeiten erfordert. Soll beispielsweise die Feldstärke eines kohärenten Zustands der (reellen) Amplitude α_r mit einem relativen Fehler von höchstens F gemessen werden, so muß für die maximale Wechselwirkungszeit $\tau = \epsilon$ folgende Ungleichung erfüllt sein

$$g\epsilon \leq \sqrt{\frac{F}{2/3\alpha_r^2 + 1/2}}, \quad (6.32)$$

vorausgesetzt die nach Gln. 6.29 geforderte minimale Wechselwirkungszeit

$$g\tau_{min} = \pi/4\sqrt{\gamma_0^2 + 1}^{-1} \quad (6.33)$$

($n=0$) zur Messung des (negativen) Imaginärteils erlaubt dies.

Vom experimentellen Standpunkt aus gesehen muß zusätzlich noch gesichert sein, daß die bei hohen Verschiebungsamplituden schnell werdenden Rabioszillationen aufgrund der Streuung in der Wechselwirkungszeit, noch aufgelöst werden können. Für die maximale Verschiebungsamplitude γ_0 , die bei einer Wechselwirkungszeit-Streuung $\Delta\tau/\tau$ gerade noch aufgelöst werden kann gilt

$$\gamma_0 \leq \frac{\pi}{g\tau} \frac{\tau}{\Delta\tau}. \quad (6.34)$$

Zur Veranschaulichung des Phasendifusionsprozesses von einem kohärenten Zustand aus in den phasenlosen stationären EAM-Zustand gleicher mittlerer Photonenzahl sind in Abb. 6.10 drei *Schnappschüsse* der charakteristischen Funktion abgebildet. Der kohärente Zustand kann analytisch berechnet werden und lautet

$$C_{|\alpha_r + i\alpha_i\rangle}(\beta_r + i\beta_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2 - 2i\alpha_i\beta_r + 2i\alpha_r\beta_i\right). \quad (6.35)$$

Die Phasendifusion macht sich in der zunehmenden Rotationssymmetrie und im Abflachen des Imaginärteils (Steigung in Null entspricht der mittleren E-Feldstärke) bemerkbar und endet für Zeiten, die groß im Vergleich zur Phasendifusionszeit sind, beim stationären EAM-Zustand $\rho^{(ss)}$ dessen charakteristische Funktion sich zu

$$C_{\rho^{(ss)}}(|\beta|) = e^{-1/2|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^0(|\beta|^2) \langle n|\rho^{(ss)}|n\rangle \quad (6.36)$$

berechnet.

6.2.3 Bewertung der Methoden

Da beide vorgestellten Methoden auf Energiemessungen am Atom basieren, stellen sie die momentan aussichtsreichsten Kandidaten zur Messung der Phasendifusion dar.

Ein Vorteil der ersten Methode ist, daß während einer Messung die Wechselwirkungszeit nicht verändert werden muß und in einem Regime liegen kann, das üblicherweise bei EAM-Experimenten verwendet wird. Auch die erforderlichen Verschiebungsradien können

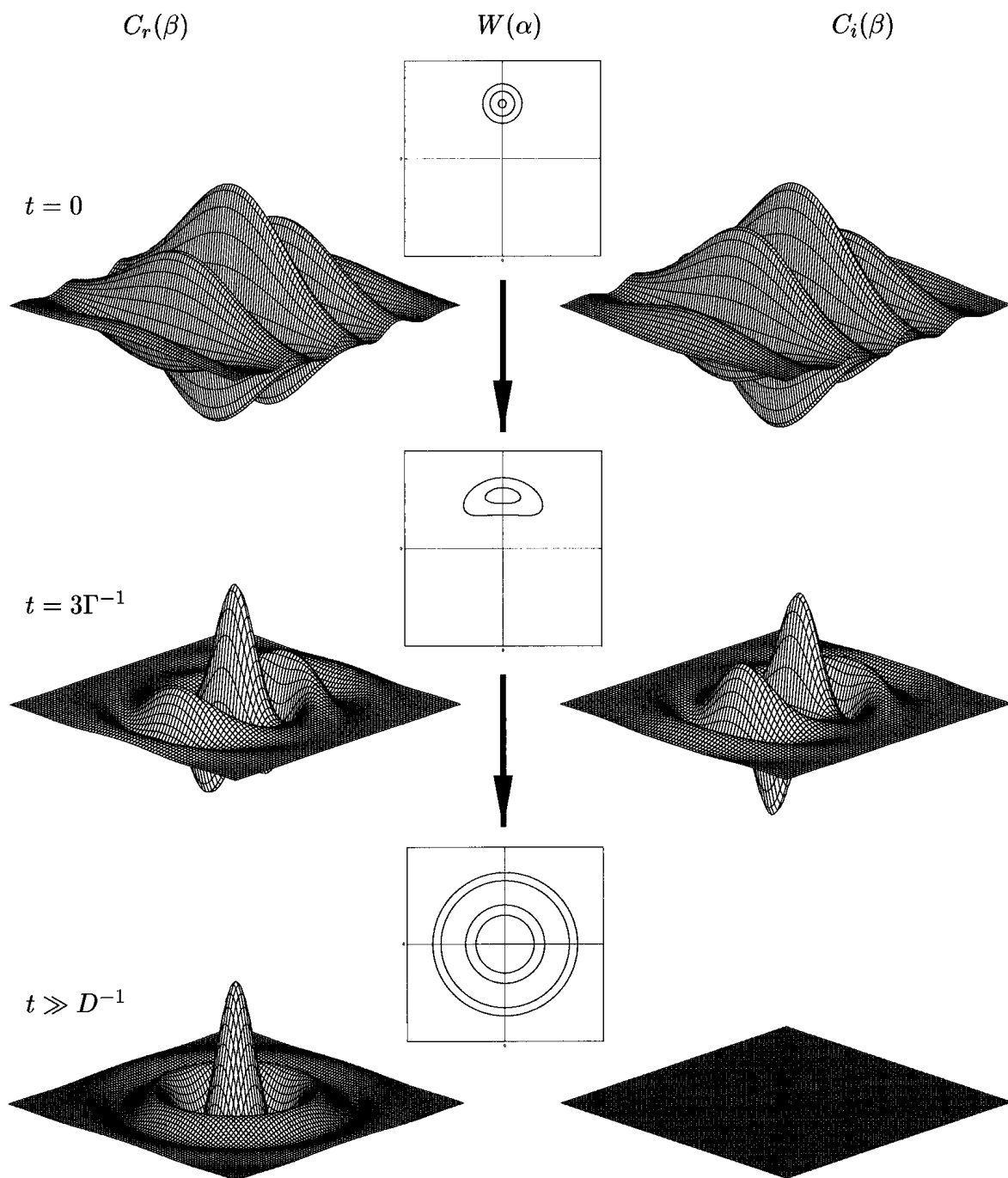


Abbildung 6.10: Phasendiffusion im Bild der charakteristischen Funktion. Links und rechts ist jeweils der Realteil C_r bzw. Imaginärteil C_i der charakteristischen Funktion abgebildet ($\beta_r, \beta_i \in [-2.3, 2.3]$). Zum Vergleich ist in der Mitte der Konturplot der Wignerfunktion dargestellt.

$t = 0$: Kohärenter Zustand $|\alpha = 3\rangle$ nach Gln. 6.35 bei „abgeschaltetem“ Atomstrahl. $t = 3\Gamma^{-1}$: Während die Phase zu zerlaufen beginnt, wird die Intensität des Feldes durch einen atomaren Fluß, charakterisiert durch $N_{ex} = 9, \theta = 1.5$, aufrechterhalten. Die kleiner werdende mittlere elektrische Feldstärke spiegelt sich in der Abnahme der Steigung von C_i im Ursprung wieder. Bei $t \gg D^{-1}$ ist der stationäre phasenlose Zustand erreicht (Gln. 6.36).

hinreichend klein gewählt werden, so daß die Atom-Feld-Wechselwirkung einen ausreichenden diabatischen Charakter zeigt. Wie im Kapitel 4 behandelt wurde, verschwinden die Rabioszillationen für hohe Feldintensitäten. Ferner hat man die Möglichkeit auch andere Dekohärenzphänomene als die Phasendiffusion zu messen. Nach Gln. 6.18 kann man durch Filterung eines anderen Fourierkoeffizienten auch Zerfälle der höheren Dichtematrix-Nebendiagonalen untersuchen, die Aussagen über die Zeitentwicklung von Photonenkorrelationen höherer Ordnung vom Typ $\langle [a^\dagger(t)]^k a(0)^k \rangle$ machen.

Diesen Vorteilen steht der Nachteil mehrerer benötigter Messungen gegenüber. Arbeitet man zum Beispiel bei einem N_{ex} von 6 (maximal mögliche mittlere Photonenzahl), kann man sicherlich davon ausgehen, daß Photonenzahlen größer 12 vernachlässigt werden können und daher 27 Emissionswahrscheinlichkeiten für jede Relaxationszeit t gemessen werden müssen. Diese Anzahl reduziert sich auf 14 Winkeleinstellungen, wenn der Zustand symmetrisch zur reellen Phasenraumachse ist, was im Experiment stets gegeben ist, da zur Präparation und zum Verschieben des Feldzustands der gleiche Synthesizer verwendet werden kann.

Die Schwierigkeit der theoretisch sicherlich schöneren zweiten Methode, die einen direkten Zusammenhang zwischen der mittleren Feldstärke und der Messung einer Emissionswahrscheinlichkeit herstellt, liegt in der Auswahl der Wechselwirkungszeit, die einer zweifachen Bedingung unterworfen ist. Zum einen muß sie sehr kurz gewählt werden, typischerweise in der Größenordnung weniger μs , und zum anderen müssen ganzzahlige Vielfache einer kleinsten Wechselwirkungszeit nach Gln. 6.29 selektiert werden. Ein weiteres Problem liegt in der Forderung nach großen Verschiebungsamplituden, die nach dem momentanen experimentellen Stand die Wechselwirkung stark adiabatisch werden lassen würden.

Beide Methoden stellen jedoch höchste Anforderungen an die Schwingungsdämpfung des Aufbaus. So muß in der ersten Phase des Experiments durch externes Einkoppeln einer Mikrowellenstrahlung im Resonator eine möglichst konstante Feldstärke aufgebaut werden, was nur dann möglich ist, wenn die Resonatorfrequenz durch mechanische Vibrationen nicht zu stark moduliert wird. Fordert man beispielsweise, daß die Intensitätsfluktuationen beim Einkoppeln kleiner 25% betragen sollen, so muß für die maximale dabei auftretende Verstimmung δ_{max} nach Gln. 3.18

$$\frac{\langle n \rangle_{\delta=0}}{\langle n \rangle_{\delta=max}} = \frac{4\delta_{max}^2 + \Gamma^2}{\Gamma^2} < \frac{4}{3} \quad (6.37)$$

gelten. Definiert man diese maximale Verstimmung δ_{max} als die Hälfte der inhomogenen Linienbreite Γ_{inh} , so kann obige Bedingung auch als

$$\Gamma_{inh} = 2\delta_{max} < 3^{-1/2}\Gamma \simeq 0.6\Gamma \quad (6.38)$$

geschrieben werden. Diese Abschätzung setzt voraus, daß die Feldmode zu jedem Zeitpunkt im quasi-stationären Zustand ist. Sind hingegen die Schwankungen der durch die Vibrationen zeitabhängigen Verstimmungen schnell gegenüber Γ^{-1} , kann die Feldintensität ihren stationären Wert nicht erreichen und wird deshalb weniger fluktuieren.

Eine weitere Bedingung muß während der zweiten Phase des Experiments erfüllt sein. Zu Beginn dieser Phase wird der Synthesizer vom Resonatorfeld entkoppelt, wobei die Feldphase zu diffundieren beginnen kann. Daraufgehend wird der Feldzustand nach einer Zeit t durch einen Mikrowellenpuls verschoben (siehe Abb. 6.3). Damit nun diese Verschiebung in eine bestimmte, reproduzierbare Richtung (im Phasenraum) erfolgt, muß natürlich gewährleistet sein, daß sich Feld und Synthesizer während der Diffusionszeit kohärent entwickelt

haben. Soll die Unsicherheit des Verschiebungswinkels kleiner $\pi/4$ betragen, führt das auf die Bedingung für die maximale Wartezeit

$$t_{max} \leq \frac{\pi}{4\delta_{max}}. \quad (6.39)$$

Wenn Messungen bis zu einer maximalen Phasenrelaxationszeit von $n\Gamma^{-1}$ ($n=1,2,..$) durchgeführt werden sollen, muß für die oben definierte inhomogene Linienbreite

$$\Gamma_{inh} \leq \frac{\pi}{2n}\Gamma \quad (6.40)$$

gelten.

Kapitel 7

Aufbau des Experiments

Bei dem EAM-Experiment soll die kohärente Wechselwirkung zwischen einem Zwei-Niveau-System und einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes realisiert werden, um grundlegende quantenmechanische Aspekte dieser Wechselwirkung im Labor nachweisen und verifizieren zu können. Gerade dieser etwas reduktionistisch anmutende Ansatz ist es aber auch, der den Aufwand dieser Experimente in die Höhe treibt.

So muß zunächst ein Zwei-Niveau-System von langer Lebensdauer und hoher Feldkopplung zur Verfügung gestellt werden. Diesen Anforderungen werden Mikrowellenübergänge bei Rydbergatomen gerecht, da sie bei typischen Atomstrahlexperimenten mehrere Zentimeter überbrücken können, ohne zu zerfallen, und da sie aufgrund ihres *gigantischen* Atomdurchmessers von $0.45\text{ }\mu\text{m}$ ($Rb - 63P$) sehr hohe Polarisierbarkeiten und folglich auch hohe Feldkopplungen erreichen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird deshalb die Spektroskopie von Rubidium-Rydbergzuständen und deren geschwindigkeitsselektive Anregung besprochen.

Ferner muß ein Mikrowellenresonator hoher Güte in der Lage sein, die kontinuierliche Modenstruktur des freien Raumes im Bereich der EAM-Übergangsfrequenz soweit abzuschirmen, daß das Atom in guter Näherung nur noch mit einer Mode des Resonators quasiresonant wechselwirkt. Andere Resonatormoden sollen aufgrund einer hohen Atom-Feld-Verstimmung für die Dynamik irrelevant sein. Die hohen Ansprüche an die Güte der Kavität müssen ferner sicherstellen, daß beim EAM-Betrieb das von einem Rydbergatom emittierte Photon mindestens bis zur Wechselwirkung des nächsten Atoms, typischerweise ein paar Millisekunden später, gespeichert wird (siehe Bed. 2.54). Bei den Garching-Experimenten werden geschlossene zylindrische Resonatoren verwendet, die bei den typischen Betriebstemperaturen zwischen 0.3 K und 1.5 K supraleitend sind und deswegen Photonenspeicherzeiten von bis zu 400 ms ermöglichen. Die Planung und Fertigung eines solchen Resonators ist Thema des zweiten Abschnitts.

Zur Erzeugung solch tiefer Temperaturen ist ein modifizierter kommerzieller ^3He -Kryostat im Einsatz, der, zusammen mit dem Atomofen und der Zwischenanregung, auf einen aktiv schwingungsgedämpften Lasertisch gestellt wurde, da die im nächsten Kapitel beschriebenen EAM-Mikrowellen-Experimente höchste Ansprüche an die Vibrationsarmut des Aufbaus stellen.

In Abb. 7.1 sind alle wesentlichen Bestandteile des experimentellen Aufbaus schematisch dargestellt.

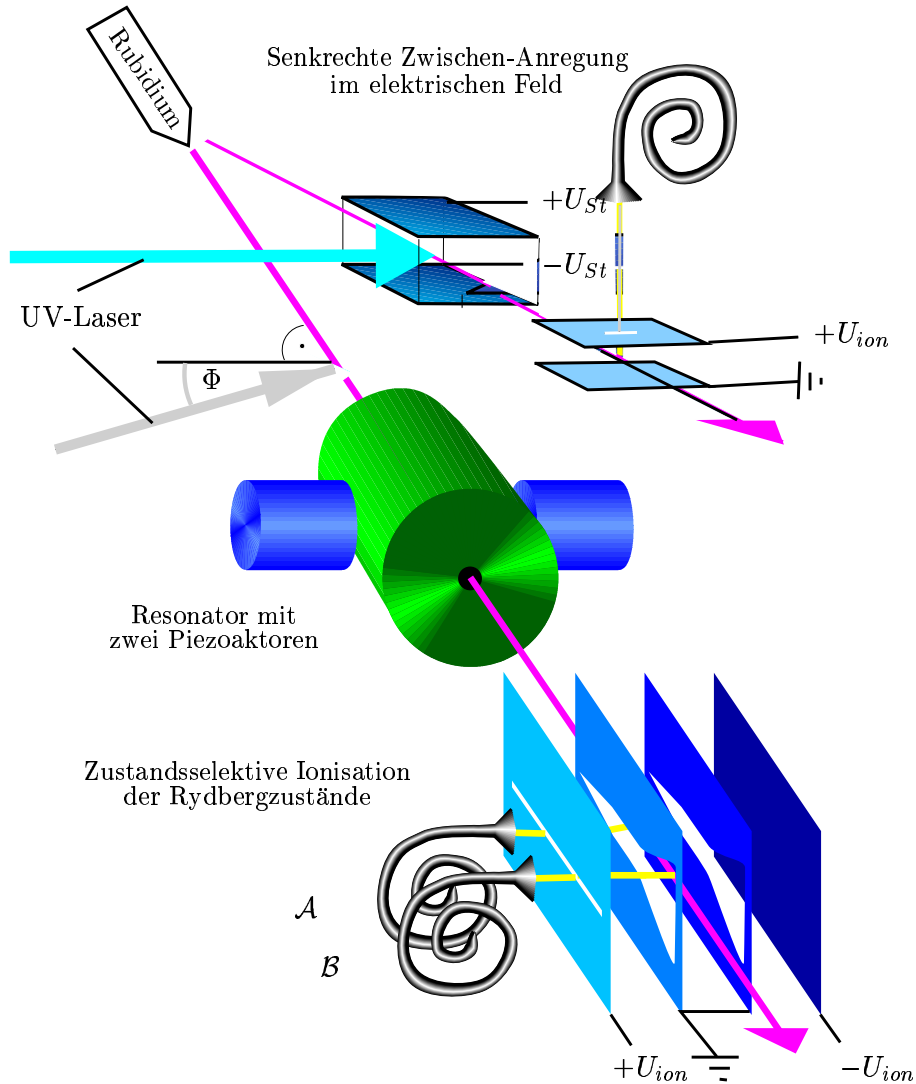


Abbildung 7.1: Schematischer Aufbau des EAM-Experiments. Ein hochkollimierter Atomstrahl wird vor dem Resonator unter einem Winkel Φ mit einem UV-Laser angeregt. Die so präparierten $^{85}\text{Rb} - 63\text{P}_{3/2}$ Rydbergzustände wechselwirken mit der TE_{121} -Mode des Resonators, die mit Hilfe von Piezoaktoren auf die Übergangsfrequenz von 21.456 GHz zu dem tiefer liegenden Rydbergzustand $61\text{D}_{5/2}$ gestimmt werden kann. Diese beiden Zustände können in der Feldionisationseinheit getrennt voneinander detektiert werden. Die geerdeten Schlitzplatten („Cola-Flaschen-Design“) ermöglichen einen sanften Anstieg der E-Feldstärke. Der obere Zustand ionisiert bei kleineren Feldstärken und wird folglich im ersten Channeltron A detektiert, der untere im Channeltron B. Ein zweiter kollimierter Atomstrahl wird in der „Zwischenanregungszone“ bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes senkrecht angeregt. Das schmale starkverschobene Anregungsprofil wird zur Stabilisierung des Farbstofflasers und somit zur Auswahl einer Geschwindigkeitsklasse bei der schiefen Anregung vor dem Resonator verwendet.

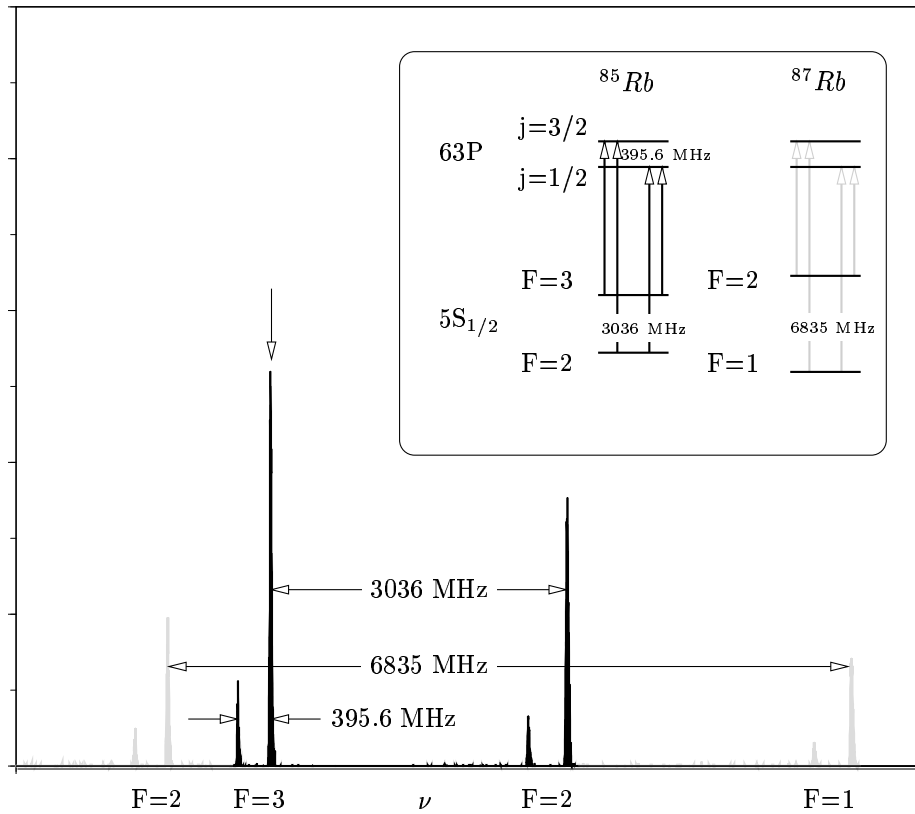


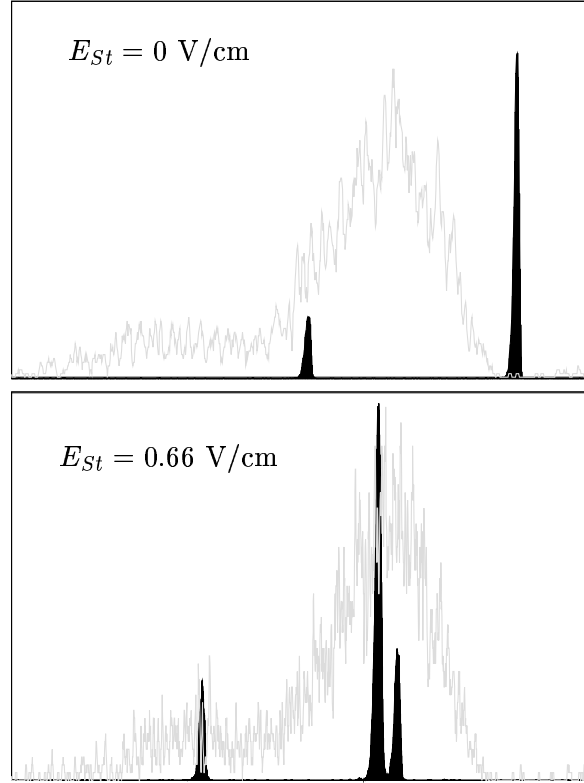
Abbildung 7.2: Laseranregungsspektrum in die $63P$ -Rydberg-Mannigfaltigkeit der Rubidiumisotope ^{85}Rb (schwarz) und ^{87}Rb (grau). Während die Hyperfeinaufspaltung beider Grundzustände klar aufgelöst werden kann, ist bei den Rydbergzuständen gerade noch die Feinstrukturaufspaltung sichtbar. Bei den EAM-Experimenten wird der $5S_{1/2}(F=3) \rightarrow 63P_{3/2}$ Übergang des ^{85}Rb -Isotops verwendet (Pfeil).

7.1 Spektroskopie von Rydbergatomen

Der im Experiment verwendete $63P_{3/2}$ -Rydbergzustand wird durch eine 1-Photonen-Laseranregung des $5S_{1/2}(F=3)$ Grundzustands des ^{85}Rb -Isotops mit einem frequenzverdoppelten Farbstofflaser (Spectra-Physics 380D) präpariert. Dieser Laser wird mit Rhodamin 6G betrieben und von einem Argon-Ionenlaser (Coherent Innova 310) mit 6 Watt gepumpt. Da Rhodamin 6G nur im Bereich zwischen 480-560 nm eine hohe Absorption aufweist, wird die benötigte UV-Wellenlänge von 297 nm durch eine interne Frequenzverdopplung bei 594 nm erzeugt. Man erreicht auf diese Weise eine UV-Leistung von bis zu 6 mW bei einer Linienbreite von 1 MHz.

In Abb. 7.2 ist ein Anregungsspektrum in $63P$ -Zustände beider natürlich vorkommender Rubidium Isotope (^{85}Rb , Kernspin $I=5/2$, 72.1% und ^{87}Rb , $I=3/2$, 27.9%) dargestellt, bei dem die Atome senkrecht zur Flugrichtung angeregt wurden. Je nach Orthogonalität des Laserstrahls zur Atomstrahlrichtung betragen die Linienbreiten zwischen 5 und 15 MHz. Diese charakteristischen Frequenzabstände und Amplitudenverhältnisse ermöglichen im Experiment die Identifizierung der Anregungslinie des oberen EAM-Zustands $63P_{3/2}$. Die so präparierten Atome zeichnen sich durch eine hohe Lebensdauer von 250 μs und eine starke Kopplung an die Mikrowellenmode ($\bar{g}=40$ krad/s) aus und erfüllen zusammen mit typischen

Abbildung 7.3: Vergrößerung des Feinstruktur-aufgespaltenen $^{85}\text{Rb } 5S_{1/2}(F=3) \rightarrow 6^3P$ Anregungsspektrums. Dabei wurde der Atomstrahl einmal im Kryostat vor dem Resonator unter einen Winkel von ca. 13° (grau) und simultan dazu in der Zwischenanregungszone senkrecht angeregt (schwarz). Je nach Rotverstimmung des Lasers bezüglich der senkrechten Anregungsfrequenz werden im Fall der schrägen Anregung unterschiedliche Geschwindigkeitsklassen selektiert. Im Experiment wird der Laser auf eine durch den Starkeffekt verschobene, senkrecht angeregte Linie stabilisiert und fixiert dadurch die Geschwindigkeit der angeregten Atome vor dem Resonator (Bild unten).



Fluggeschwindigkeiten von 500 m/s die EAM-Bedingungen in Gln. 2.49,2.50.

Da die Atome im Experiment den Atomofen mit einer breiten Geschwindigkeitsverteilung verlassen, die EAM-Dynamik aber eine feste Wechselwirkungszeit erfordert, ist eine zusätzliche Selektion der anzuregenden Atome unabdingbar. Dazu werden die Atome vor dem Resonator unter einem Winkel von ca. $\Phi = 13^\circ$, gegen die Senkrechte der Atomstrahlrichtung, angeregt (Abb. 7.3, graues Spektrum). Aufgrund des Dopplereffekts treten dann jeweils nur die Atome in Resonanz, deren Geschwindigkeit v gerade eine Rotverstimmung $\Delta\nu$ des Lasers gegenüber der senkrechten Anregung gemäß

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \sin \Phi \quad (7.1)$$

kompensieren. Somit kann die in Abb. 7.3 gezeigte Frequenzachse, nach entsprechender Kalibrierung mittels Flugzeitspektren, auch als Geschwindigkeitskoordinate betrachtet werden [74].

Um im Experiment die Anregung der Rubidiumatome dauerhaft auf eine bestimmte Geschwindigkeit stabilisieren zu können, wird in einer zweiten Anregungszone der Atomstrahl in Anwesenheit eines statischen elektrischen Feldes senkrecht angeregt (Abb. 7.1). Auf diese Weise werden die Übergänge aufgrund des quadratischen Starkeffekts definiert verschoben und dienen der Farbstofflaserelektronik als Stabilisierungssignal.

Zur Erklärung der gemessenen Starkspektren kann bei kleinen Linienverschiebungen (gegenüber der Feinstrukturaufspaltung) auf störungstheoretische Ansätze zurückgegriffen werden [139, 141, 146]. Zunächst wird für die P- und D-Rydbergzustände eine zum Quadrat der Feldstärke proportionale Verschiebung

$$\Delta\nu_{St} = -\frac{1}{2} \alpha |E|^2 \quad (7.2)$$

angesetzt. Für eine Hauptquantenzahl n ist die auftretende Polarisierbarkeit α dabei eine Funktion des Gesamtdrehimpulses J und dessen Projektion auf die z-Achse M_J (definiert durch die Richtung der E-Feldstärke). Man erhält

$$\alpha^{(J,M_J)} = \alpha_0^{(J)} + \alpha_2^{(J)} \frac{3M_J^2 - J(J+1)}{J(2J-1)}. \quad (7.3)$$

Während der $P_{3/2}$ -Zustand in zwei Zustände mit jeweils gleichem $|M_J|$ der Polarisierbarkeiten

$$\begin{aligned} \alpha^{(3/2,\pm 1/2)} &= \alpha_0^{(3/2)} - \alpha_2^{(3/2)} \\ \alpha^{(3/2,\pm 3/2)} &= \alpha_0^{(3/2)} + \alpha_2^{(3/2)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

aufspaltet, zeigt der $P_{1/2}$ -Zustand eine einfache Verschiebung mit der Polarisierbarkeit

$$\alpha^{(1/2,\pm 1/2)} = \alpha_0^{(1/2)}. \quad (7.5)$$

Die skalaren Polarisierbarkeiten $\alpha_0^{(1/2)}$ und $\alpha_0^{(3/2)}$ sind in dieser Näherung gleich groß [141]. Mit diesen Erkenntnissen kann das starkverschobene Spektrum aus Abb. 7.3 quantitativ ausgewertet werden. Beide Feinstrukturkomponenten wurden aufgrund ihrer skalaren Polarisierbarkeit von $\alpha_0^{(1/2,2/3)} = 1.2 \text{ GHz}/(\text{V/cm})^2$ um ca. 260 MHz verschoben [142]. Das entspricht einer im Labor eingestellten Plattenspannung von

$$|U_{St}| \simeq \sqrt{\Delta\nu_{St}/(1.65[\text{kHz}/\text{mV}^2])} = 397 \text{ mV}. \quad (7.6)$$

Zusätzlich wurde die $63P_{3/2}$ -Linie wegen der nichtverschwindenden tensoriellen Polarisierbarkeit α_2 in eine stärkere $|M_J| = 3/2$ und schwächere $|M_J| = 1/2$ Linie aufgespalten. Die Anregungsstärke dieser beiden Übergänge kann durch die Polarisation des eingestrahnten Lasers geregelt werden. So werden bei π -Polarisation (linear polarisiert, parallel zur E-Feldstärke) nur $\Delta M_J = 0$ -Übergänge induziert, in diesem Fall also die $|M_J| = 1/2$ -Linie, und bei σ -Polarisation (linear polarisiert, senkrecht zum E-Feld) wird allein die $|M_J| = 3/2$ -Linie angeregt.

7.2 Supraleitende Mikrowellenresonatoren

Für die EAM-Experimente werden in Garching ausschließlich geschlossene zylindrische Niob-Resonatoren verwendet, die extrem hohe Güten von bis zu $3 \cdot 10^{10}$ erreichen [75]. Bei einem atomaren Fluß von 1000 s^{-1} können damit stationäre Felder mit einer mittleren Photonenzahl von über $\langle n \rangle = 200$ aufgebaut werden. Allerdings sind in diesem Bereich stabile Mikrowelleneinkopplungen experimentell nahezu unmöglich, da die homogene Linienbreite bei diesen *Rekord*-Güten nur noch 715 mHz beträgt, die nicht einmal von den verwendeten Mikrowellensynthesizern mit einer Linienbreite von ca. 1 Hz unterboten werden. Schon allein diese Tatsache würde beim resonanten Einkoppeln in das schmale Profil der Moden-Lorentz-Kurve beträchtliche Intensitätsschwankungen mit sich bringen.

Beachtet man aber den in Tabelle 7.1 abgeschätzten Frequenzhub von 160 Hz bei einer Quetschung des Resonatorzylindermantels um nur 1 nm, so ist zu befürchten, daß sich

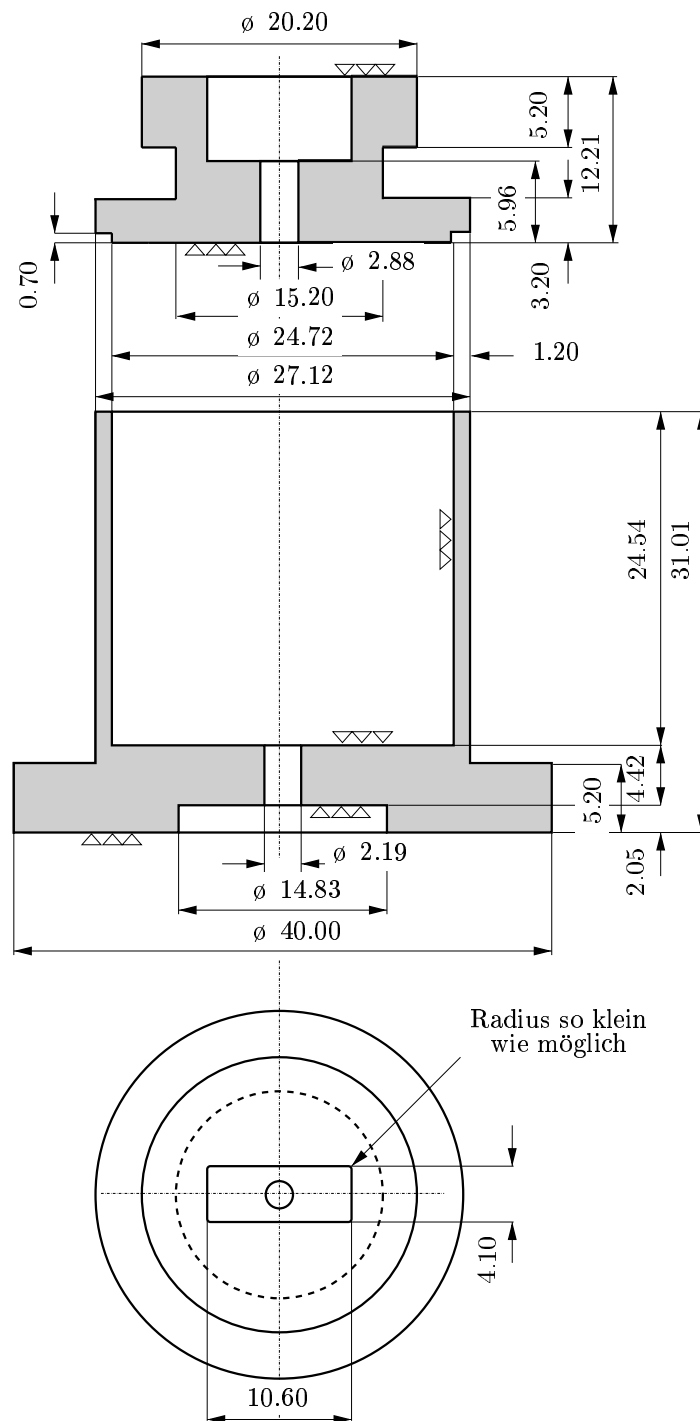


Abbildung 7.4: Technische Zeichnung des Niobresonators KM21. Dieser Resonator wurde speziell für die EAM-Experimente mit Mikrowelleneinstrahlung entworfen. Im Gegensatz zu den älteren Resonatoren zeichnet er sich durch eine Koppelloch-begrenzte Güte von ca. $5 \cdot 10^9$ aus. Bei höheren Güten würde die durch Vibrationen verursachte inhomogene Linienverbreiterung Einkopplexperimente unmöglich machen.

Über den Deckel des Resonators findet die Mikrowelleneinkopplung statt. Dabei koppelt die TE_{10} -Mode des rechteckigen K-Band Hohlleiters evaneszent an die TE_{11} -Mode des runden Koppeloches an (magnetisch). Am Ende des Koppeloches kann dann ebenfalls magnetisch die TE_{121} -Mode des Hohlraums angeregt werden.

| Frequenzveränderungen beim Resonator KM21 | | |
|---|----------------------|--|
| Frequenzshift | Maß | Grund |
| −3 MHz | | Beide Koppellochbohrungen |
| +30 MHz | alle Maße / 1.00142 | Thermischer Verzug beim Abkühlen von 300 K nach 1 K |
| −9...−18 MHz | L,D,l,d: +10...20 µm | Elektropolitur vor dem Elektronenstrahlschweißen (Galvanik IPP) |
| +35 MHz | L: −100 µm | Durch Schweißen bedingte Schrumpfung (ProBeam, Planegg) |
| | L,D,l,d: −50 µm | Sicherheitsvergrößerung, die durch nachträglichen Ätzen entfernt werden kann |
| +30...+40 MHz | | Grobabstimmbereich der mechanischen Schraubenzieher-Quetschvorrichtung; Aufhebung der Zwangspolarisation |
| ±9 MHz | ±10 µm | Fertigungstoleranz (mech. Werkstatt des MPQ) |

Tabelle 7.1: Abschätzung der Resonanzfrequenzabweichung beim realen Resonator mit den Maßen Resonator Durchmesser (D) und Länge (L) (innen), sowie Durchmesser (d) und Länge (l) der Koppellocher. Bei gleichzeitiger Vergrößerung von D, L kann die Frequenzverringernung mit $0.9 \text{ MHz}/\mu\text{m}$ abgeschätzt werden, eine Quetschung des Resonators bei $L/2$ hingegen mit $0.12 \dots 0.2 \text{ MHz}/\mu\text{m}$.

die durch mechanische Schwingungen verursachte inhomogene Linienverbreiterung als das wesentliche Problem herausstellen könnte. Eine Messung dieser Verbreiterung ist in Abb. 7.5 dargestellt und soll im folgenden kurz erklärt werden, da dieses Meßverfahren auch zur Bestimmung der Resonatorgüte routinemäßig angewendet wird.

Bei der dort gezeigten Heterodynmesung der vom Resonator emittierten Mikrowellenstrahlung wird zunächst mit einem Mikrowellensynthesizer resonant Energie in die Feldmode gepumpt. In einer zweiten Phase wird der Synthesizer um 2 kHz verstimmt, so daß sich nun die an den Koppellochern reflektierte Strahlung

$$E_{\text{refl}} e^{-i\omega_S t} \quad (7.7)$$

mit dem sehr viel schwächeren, exponentiell abfallenden, Feld der Resonatormode

$$E_{\text{reso}} e^{-i\omega_F t - \Gamma/2t} \quad (7.8)$$

überlagert und danach von einer Mikrowellendiode gemessen werden kann. Da das Signal proportional zur ankommenden Intensität ist, erhält man für den zeitabhängigen Anteil¹

$$I(t) \propto \cos((\omega_S - \omega_F)t) e^{-\frac{\omega_F}{2Q}t}. \quad (7.9)$$

Fouriertransformiert man dieses Signal, so zeigt sich dann der durch mechanische Vibrationen hinzugefügte Anteil der inhomogenen Linienverbreiterung. Wie man in der linken Messung (Abb. 7.5) erkennen kann, beträgt diese Verbreiterung ohne besondere Maßnahmen

¹Über diesen Zusammenhang kann durch Anpassung einer Exponentialfunktion an die Hüllkurve von $I(t)$ die Güte des Resonators bestimmt werden.

zur Schwingungsdämpfung typischerweise um die 300 Hz. Stabiles Einkoppeln wäre dann nur für Güten unter 10^8 möglich, die aber ihrerseits keinen EAM-Betrieb mehr ermöglichen würden.

Deswegen wurde der im nächsten Abschnitt beschriebene neu aufgebaute EAM schwingungsgedämpft konzipiert, so daß, wie im rechten Bild von Abb. 7.5 dargestellt, die inhomogene Verbreiterung immerhin auf Werte kleiner 10 Hz reduziert werden konnte.

Aufgrund dieser Vorüberlegungen besteht nun die Herausforderung beim Design und der Fertigung des verwendeten Resonators darin, daß dieser stets Güten im Bereich $1 \dots 4 \cdot 10^9$ aufweisen sollte. Diese Werte ermöglichen einerseits den EAM-Betrieb mit $N_{ex} > 1$, andererseits wird die homogene Linienbreite auf ca. 5 Hz limitiert. Um höchste Güten im Experiment unterbinden zu können, wurde der Resonator gemäß Abb. 7.4 koppelgütenbegrenzt ausgeführt ($4 \cdot 10^{10}$, nach dem Ätzen jedoch ca. $5 \cdot 10^9$). Diese, durch die Bohrungen in den Stirnflächen des Resonators verursachten Koppelgüten, lassen sich nach [148, 149] durch

$$Q_K = \frac{27}{256} (\pi c^2)^2 (2\pi\nu)^{-3} (d/2)^{-6} L D^2 \frac{\mu_0}{Z_0} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x'_{12}{}^2}\right) (J_1(x'_{12}))^2 e^{2\alpha(T E_{11})l} \quad (7.10)$$

berechnen. Wobei gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi D}{2Lx'_{12}} \\ \alpha(T E_{11}) &= \sqrt{\left(\frac{2x'_{11}}{d}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2} \\ \mu_0 &= \text{Permeabilität des Vakuums} \\ Z_0 &= 377 \, \Omega \\ c &= \text{Lichtgeschwindigkeit} \\ J_n &= \text{n-te Besselfunktion} \\ x'_{12} &= 5.331 \text{ (2.Nst. von } J_1(x)') \\ x'_{11} &= 1.841 \text{ (1.Nst. von } J_1(x)') \\ L, D &= \text{Länge und Durchmesser des Hohlraumes} \\ l, d &= \text{Länge und Durchmesser des Koppelloches.} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Ferner ist bei der Planung der Geometrie zu beachten, daß der Durchmesser D und die Länge L des zylindrischen Resonators aus der Theorieformel für die Resonanzfrequenz der TE_{121} -Mode

$$\nu_{121} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{3.394}{D}\right)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2} \quad (7.12)$$

in der Praxis nach Tabelle 7.1 modifiziert werden muß².

²Der numerische Wert 3.394 ist eine Näherung für $2x'_{12}/\pi$, mit $x'_{12}=5.331$ (2. Nullstelle der ersten Ableitung der 1. Besselfunktion).

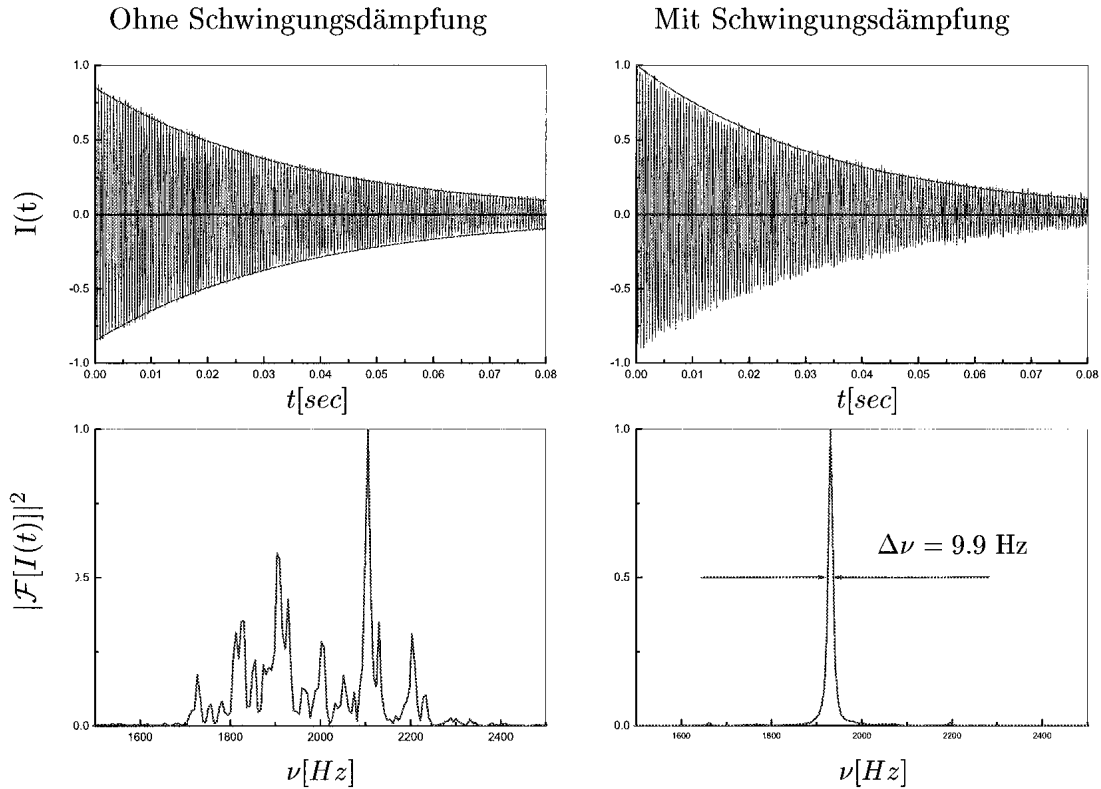


Abbildung 7.5: Heterodynmessung des vom Resonator abgestrahlten Mikrowellenfeldes. Oben sind jeweils die zur Intensität proportionalen Signale aufgetragen und darunter das entsprechende Fouriertransformierte. Während die linke Messung ohne besondere Schwingungsdämpfung gemessen wurde, sind bei der rechts dargestellten Messung alle Schwingungsdämpfungsmaßnahmen getroffen worden. Insbesondere wurde der gesamte EAM-Aufbau mit Preßluftpolstern von den Gebäudeschwingungen entkoppelt.

Die aus dem abfallenden Intensitätssignal gemessene Güte beträgt $2.4 \cdot 10^9$, während die (inhomogen verbreiterte) Linienbreite der Fouriertransformierten einer Güte von $2.2 \cdot 10^9$ entspricht. Die Vibrationsisolierung konnte somit die inhomogene Verbreiterung von typischerweise 300 Hz auf < 10 Hz reduzieren.

Nach dieser Planungsphase können die in Abb. 7.4 gezeichneten Einzelteile in der mechanischen Werkstatt mit einer Genauigkeit von ca. $10 \mu\text{m}$ aus hochreinem Niob (99,9%) gefertigt werden. Die anschließende Elektropolitur reinigt und glättet die Bauteile. Im nächsten Schritt der Herstellung werden die Deckel der Resonatoren im Vakuum Elektronenstrahlschweißt und können dann zur Reinigung in einer Ultrahochvakuumanlage bei maximal 1800°C und $3 \cdot 10^{-7}$ mbar 3 Tage lang ausgeheizt werden. Dabei kommt es zur teilweisen Rekristallisation in Form von ca. 3 mm großen Einkristalldomänen. Die anschließende Resonanzfrequenzmessung in einem kleinen Testkryostaten ergab einen Wert von 21.550 GHz, obwohl die nach Tabelle 7.1 abgeschätzten Werte zu einer theoretischen Resonanzfrequenz von 21.545...21.536 GHz führen. Es muß also angenommen werden, daß entweder der Schweißschrumpf noch etwas höher ausgefallen ist, oder die erstmalige Elektropolitur weniger Material abgetragen hat. Auch ein zusätzliches Schrumpfen durch das erstmalige Ausheizen ist nicht auszuschließen. Jedenfalls kann die Fertigung in der mechanischen Werkstatt oder ein

Ausrutscher beim Elektronenstrahlschweißen nicht dafür verantwortlich gemacht werden, da ein dazu parallel gebauter zweiter Resonator eine nur um 500 kHz (!) unterschiedliche Resonanzfrequenz aufwies.

Da die Frequenz, wie geplant, etwas über ihrem Soll liegt, muß nun die Frequenz des Resonators durch Ätzen auf den gewünschten Wert gesenkt werden. Zum Niob-Ätzen wird eine Säuremischung von 200 ml Salpetersäure (HNO_3), 400 ml Phosphorsäure (H_3PO_4) und 200 ml Flußsäure (HF) angesetzt³. Während einer 13 minütigen Ätzzeit wurde der Resonator zweimal zum Abtragtest entnommen, bei dem als äußeres Maß der Durchmesser des Mikrowellenankoppelstücks (Resonatordeckel) mit einer Mikrometerschraube vermessen wurde. Es ergab sich eine mittlere Ätzgeschwindigkeit von $3.7 \mu\text{m}/\text{min}$ am äußeren Kontrollmaß und ungefähr die Hälfte im Inneren des Resonators.



Auf diese Weise konnte die Resonanzfrequenz durch zweimaliges Ätzen auf die Sollfrequenz von 21.4448 GHz bei einer Güte von $4 \cdot 10^9$ gestimmt werden. Die Koppelgüte scheint sich dabei auf die Größenordnung von $5 \cdot 10^9$ reduziert zu haben, ein Wert, der genau den Anforderungen für die Einkoppelexperimente entspricht.

7.3 Schwingungsgedämpfter ^3He -Kryostat

Das Experimentieren bei tiefen Temperaturen ist bei EAM-Experimenten in zweierlei Hinsicht unerlässlich. Zum einen müssen thermische Anregungen der Resonatormode weitgehend unterdrückt werden, so daß der durch den Atomstrahl erzeugte, quantenmechanisch interessante, Anteil des Feldes dominiert (siehe auch Abschnitt 2.8), zum anderen müssen die Nb-Resonatoren zum Erreichen höchster Güten in den supraleitenden Zustand gebracht werden. Obwohl die Sprungtemperatur von Niob bei 9.2 K liegt, reicht diese Temperatur noch nicht aus, da die durch thermisch aufgebrochene Cooperpaare verursachten Hochfrequenzverluste in diesem Bereich noch zu groß sind. Erst ab ca. 2 K können Resonanzmessungen durchgeführt werden. Unterhalb von 1 K verbessert sich die Güte dann nicht mehr und ist durch Restverluste (Verunreinigungen der Nb-Oberfläche und normalleitende Gebiete) limitiert. Unter Berücksichtigung beider Argumente müssen im Experiment Temperaturen unter ca. 1.5 K realisieren werden, so daß der Einsatz eines ^3He -Kryostats notwendig wird.

Im Vergleich zu ^4He -Kryostaten nutzen ^3He -Kryostate den höheren Dampfdruck des leichteren ^3He -Isotops aus, um zu niedrigeren Basistemperaturen vorzustoßen. So beträgt die Siedetemperatur von ^3He bei Normaldruck ca. 3.2 K und kann durch zusätzliche Gasdruckerniedrigung auf 350 mK bei 10^{-2} mbar reduziert werden. Im Gegensatz dazu erreichen handelsübliche ^4He -Kryostate mit Abpumpen nur ca. 1.5 K. Der im Experiment eingesetzte ^3He -Kryostat der Firma Oxford Instr. erreichte eine Endtemperatur von 340 mK, die sich zwar durch den Umbau zum EAM auf 700 mK erhöhte, aber immer noch die geforderten Bedingungen erfüllt.

Da die Messung der Phasendiffusion über die im Kapitel 6 vorgeschlagene Methode der verschobenen Felder äußerst sensibel auf mechanische Vibrationen des Aufbaus reagiert, sind ferner zusätzliche Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung unerlässlich.

³   Fluorwasserstoff als Flüssigkeit, konzentriertes Gas oder wäßrige Lösung ist giftig und wirkt stark ätzend auf die Haut, Augen und Atemwege. Typische HF-Verätzungen sind sehr schmerzhaft, die Latenzzeit kann bis zu 2 Tage betragen. Die Inhalation von Konzentrationen von 50 - 100 ppm HF über 30-60 Minuten kann tödlich sein. Orale Vergiftungen verlaufen trotz medizinischer Maßnahmen meist tödlich. [<http://www-organik.chemie.uni-wuerzburg.de>]

Der größte Anteil, der auf den Resonator übertragenen Vibrationen, wird von zwei Drehschiebervakuumpumpen verursacht, die das Vorvakuum für die drei Turbomolekularpumpen am Kryostat, Zwischenanregungszone und Atomofen erzeugen bzw. den mit flüssigem Helium gefüllten 1K-Topf im Kryostat abpumpen. Zur effektiven Dämpfung wurden einerseits die Pumpen selbst auf Gummipufferelementen gestellt und andererseits die Pumpenstutzen über vakuumtaugliche Gummischläuche mit einem am Laborboden verankerten Edelstahl-Vierkantrohr verbunden. Das Ende dieses Rohres wurde dann über VA-Wellschläuche mit den Turbomolekularpumpen des EAM-Aufbaus verbunden. Da normalerweise in Turbomolekularpumpen Kugellager verwendet werden, die bei den auftretenden hohen Umdrehungszahlen (bis zu 60000 U/min) für hochfrequente Schwingungen des Aufbaus verantwortlich gemacht werden können, wurde eine Pumpe mit magnetischem Lager installiert, wobei die anderen zwei bei kritischen Messungen kurzfristig abgeschaltet werden können. Zur zusätzlichen akustischen Isolation wurden alle verwendeten (lauten) Pumpen in eine Schallschutzbox gestellt.

Aber auch Gebäudeschwingungen, die durch Trittschall, Geräte und Maschinenvibrationen in Nachbarlabors, Gebäudeaufzüge, etc. verursacht werden, müssen gedämpft werden. Dazu wurde die komplette Vakuumapparatur auf eine kommerzielle, auf Jochträgern ruhenden, Lasertischplatte aufgebaut (siehe Abb. 7.6). Zur bestmöglichen Schwingungskopplung vom Boden kann diese Aluminiumwabenplatte durch Preßluftpolster ca. 1 cm angehoben werden. Die eingebaute aktive Niveauregulierung stabilisiert dann die eingestellte Höhe auf ± 0.2 mm.

Das überzeugende Resultat dieser schwingungsdämpfenden Maßnahmen kann man am Fourierspektrum der vom Resonator abgestrahlten Intensität aus Abb. 7.5 erkennen. Während die durch mechanische Vibrationen inhomogen verbreiterte Linie ohne Schwingungsdämpfung mindestens 300 Hz beträgt, wird sie auf Werte kleiner 10 Hz im Fall der Schwingungsdämpfung vermindert. Dieser Wert erlaubt stabile Einkopplungen in Resonatoren mit Güten bis zu $2 \cdot 10^9$.

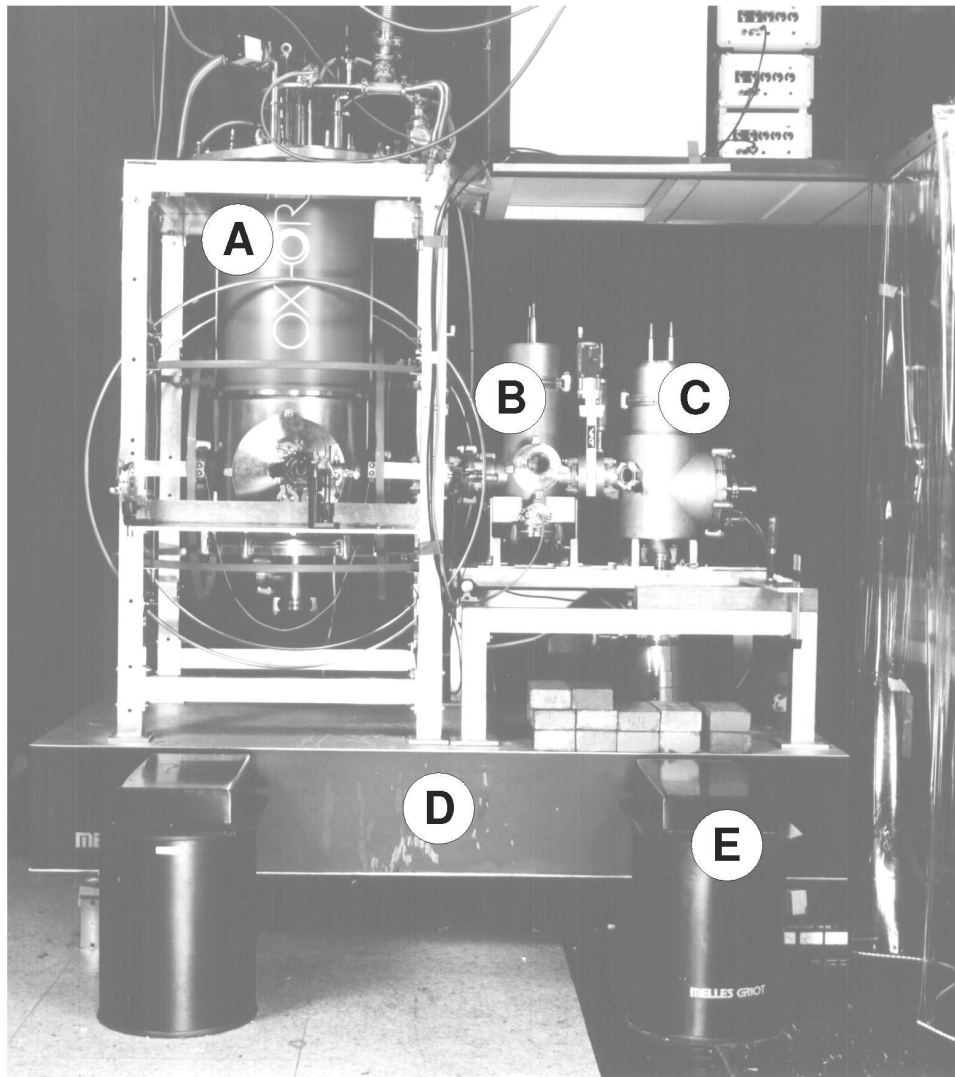


Abbildung 7.6: Schwingungsgedämpfter EAM-Aufbau. Im „Atomofen“ (C) tritt Rubidiumdampf durch eine Düse aus. Ein Teil dieses Atomstrahls wird in der „Zwischenanregungszone“ (B) durch senkrechte Lasereinstrahlung angeregt und dient der Stabilisierung des Lasers auf die starkverschobene $63P_{3/2}$ -Linie. Ein anderer Teil gelangt durch Blenden in den ^3He -Kryostat (A). Dort werden die hochkollimierten Rubidiumatome schräg angeregt. Diese Methode ermöglicht aufgrund des Dopplereffekts eine gleichzeitige Geschwindigkeitsauswahl. Die so präparierten Atome wechselwirken dann mit dem Resonator und werden anschließend zustandsselektiv detektiert. Zur Schwingungsdämpfung wurden alle Komponenten auf eine kommerzielle Lasertischplatte (D) gestellt, die zusätzlich mit Hilfe von Pressluftpolstern (zwischen Plattenfüßen und Jochträgern (E)) von den Bodenvibrationen entkoppelt werden kann.

Kapitel 8

Experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die aktuellen Meßergebnisse im Hinblick auf die Phasendiffusionsmessung präsentiert. Es wurde versucht die Phasendiffusion bzw. Linienbreite der EAM-Strahlung über die erste in Kapitel 6 beschriebene Methode zu messen. Diese Methode ist die leichter zu realisierende, da die EAM-Betriebsparameter, wie Atomgeschwindigkeit und Wechselwirkungszeit, nicht modifiziert werden müssen. Auch die Streuung dieser Parameter stellt hier kein kritisches Maß dar. Die zentralen Schritte, die im Experiment gemacht werden müssen, bevor eine Durchführung der eigentlichen quantitativen Messung sinnvoll erscheint, sind wie folgt

1. die Inbetriebnahme des EAM. Hier muß gezeigt werden, daß die grundlegenden Elemente des Experiments, wie Magnetfeldkompensation, Atomanregung einer Geschwindigkeitsklasse, zustandsselektive Ionisation der Rydbergatome und *Handling* des Resonators beherrscht werden. Davon wird im ersten Abschnitt berichtet.
2. Demonstration der Schwingungsdämpfung. Selbst bei den für den EAM-Betrieb geforderten hohen Resonatorgüten um 10^9 mit einer homogenen Linienbreite von 21 Hz, muß eine stabile Mikrowelleneinkopplung gewährleistet werden. Wie im letzten Kapitel, speziell in Abb. 7.5 gezeigt wurde, konnte die durch mechanische Vibrationen des Aufbaus verursachte inhomogene Linienverbreiterung durch die ergriffenen Schwingungsdämpfungsmaßnahmen sogar auf Werte < 10 Hz verringert werden. Folglich kann bei den Phasendiffusionsmessungen mit Güten der Größenordnung $2 \cdot 10^9$ gearbeitet werden.
3. Test der Feld-Synthesizer-Kohärenzzeit. Dieser Punkt hängt natürlich eng mit dem letzten Punkt der Schwingungsdämpfung zusammen. Trotzdem muß der gesamte Aufbau, hier speziell der Mikrowellenaufbau mit seinen Hohlleitern, Koaxialkabeln, Abschwächern, Phasenschiebern und Pin-Schaltern hinsichtlich seiner Anfälligkeit auf Phasenschwankungen getestet werden.
4. Positionierung der mechanischen Quetschvorrichtung des Resonators. Es zeigt sich, daß die bei einem Frequenzdurchlauf auftretenden Strukturen eine Frequenzauflösung von ca. 10 Hz erfordern. Oder, umgerechnet auf den Hub der Piezoaktoren, müssen die Stellelemente in der Lage sein die Resonatormantelverformung mit einer Präzision von ca. 0.06 nm durchzuführen.

5. Untersuchung der Feld-Atom-Dynamik bei einem eingekoppelten externen Mikrowellenfeld. Zur Messung der Phasendiffusion ist es insbesondere für quantitative Aussagen wichtig, daß die Atomstatistik nach Wechselwirkung mit einem vorschobenen Feldzustand verstanden ist. Wie schon in Kapitel 4 beschrieben, muß hier die zunehmende Adiabaticität mitberücksichtigt werden.

Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, konnten alle hier aufgezählten Messungen an dem neuen schwingungsgedämpften ^3He -Kryostat erfolgreich durchgeführt werden.

8.1 Ein-Atom-Maser Resonanz

Bei den hier vorgestellten Experimenten versteht man unter der EAM-Resonanz den durch das Resonatorfeld induzierte $63\text{P}_{3/2} \rightarrow 61\text{D}_{5/2}$ Rubidiumübergang. Je nach Länge der Wechselwirkungszeit kann auch ein mehrfacher kohärenter Energieaustausch zwischen der Resonatormode und dem Rydbergatom beobachtet werden.

Im Experiment muß der Resonator dazu im Kryostat auf eine Temperatur von ca. 1 K gebracht werden und mit einer mechanischen Quetschvorrichtung, die von außen über eine Vakuumdurchführung mit einem Schraubenzieher bedienbar ist, auf eine Resonanzfrequenz von ca. 200 kHz (je nach Linienbreite der EAM-Resonanz) unter der atomaren Übergangsfrequenz von 21.45604 GHz gestimmt werden. Während die Atome geschwindigkeitsselektiv in den oberen Zustand angeregt werden und jeweils die Detektorklicks nach der Wechselwirkung aufgezeichnet werden, kann der Resonator mit Hilfe von Piezoaktoren langsam um 300-1200 kHz durchgestimmt werden. Wie man bei den Messungen in Abb. 8.1 erkennen kann, ist im Anfangsbereich der Meßkurven der Resonator noch zu stark gegen den atomaren Übergang verstimmt. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom in die Mode emittiert ist folglich auch entsprechend klein. Erst im Bereich der Übergangsfrequenz nimmt die Zählrate für den unteren EAM-Zustand zu und die Masertätigkeit kann einsetzen. Die Linienbreite zeigt, wie im unteren Bild von Abb. 8.1 dargestellt, bereits bei einem moderaten Atomfluß von 270 s^{-1} eine deutliche Leistungsverbreiterung. Die dann auftretende asymmetrische Linienform kann unter Mitberücksichtigung von statischen elektrischen Feldern im Bereich der Resonatorkoppellöcher erklärt werden [62–64].

Voraussetzung zur Messung solch schmaler Übergänge ist eine gute Erdmagnetfeldkompensation. Die äußerst präzise Methode, die zur Kompensation herangezogen wird, basiert auf der Präparation eines atomaren magnetischen Dipols vor dem Resonator. Dazu wird der zirkular polarisierte Strahl einer Laserdiode, die mit Hilfe einer Polarisationspektroskopie auf die Rubidium D2-Linie $5\text{S}_{1/2}(F=3) \rightarrow 5\text{P}_{3/2}(F'=4)$ (780 nm) stabilisiert wurde, auf den Atomstrahl vor dem Resonator fokussiert. Das dadurch erzielte optische Pumpen präpariert nach mehrere Anregungszyklen einen Rubidium-Grundzustand mit maximaler magnetischer Quantenzahl. Das Atom beginnt dann in dem Restmagnetfeld zu präzedieren und wird zwischen dem Resonator und der Detektionseinheit mit einem ebenfalls zirkular polarisiertem UV-Laserstrahl in einen $\text{P}_{1/2}$ -Rydbergzustand angeregt. Es zeigt sich, daß die Anregungsrate von der momentanen Ausrichtung des Dipols abhängt. Durch anschließende Magnetfeldvariationen, mittels am Kryostat befestigter Helmholtzspulen, kann man nach dem in [64] detailliert beschriebenen Verfahren das Erdmagnetfeld bis auf ca. 2 mG kompensieren. Die Aufspaltung der EAM-Linie beträgt dann nur noch 2.8 kHz und trägt somit nicht mehr zur Verbreiterung bei.

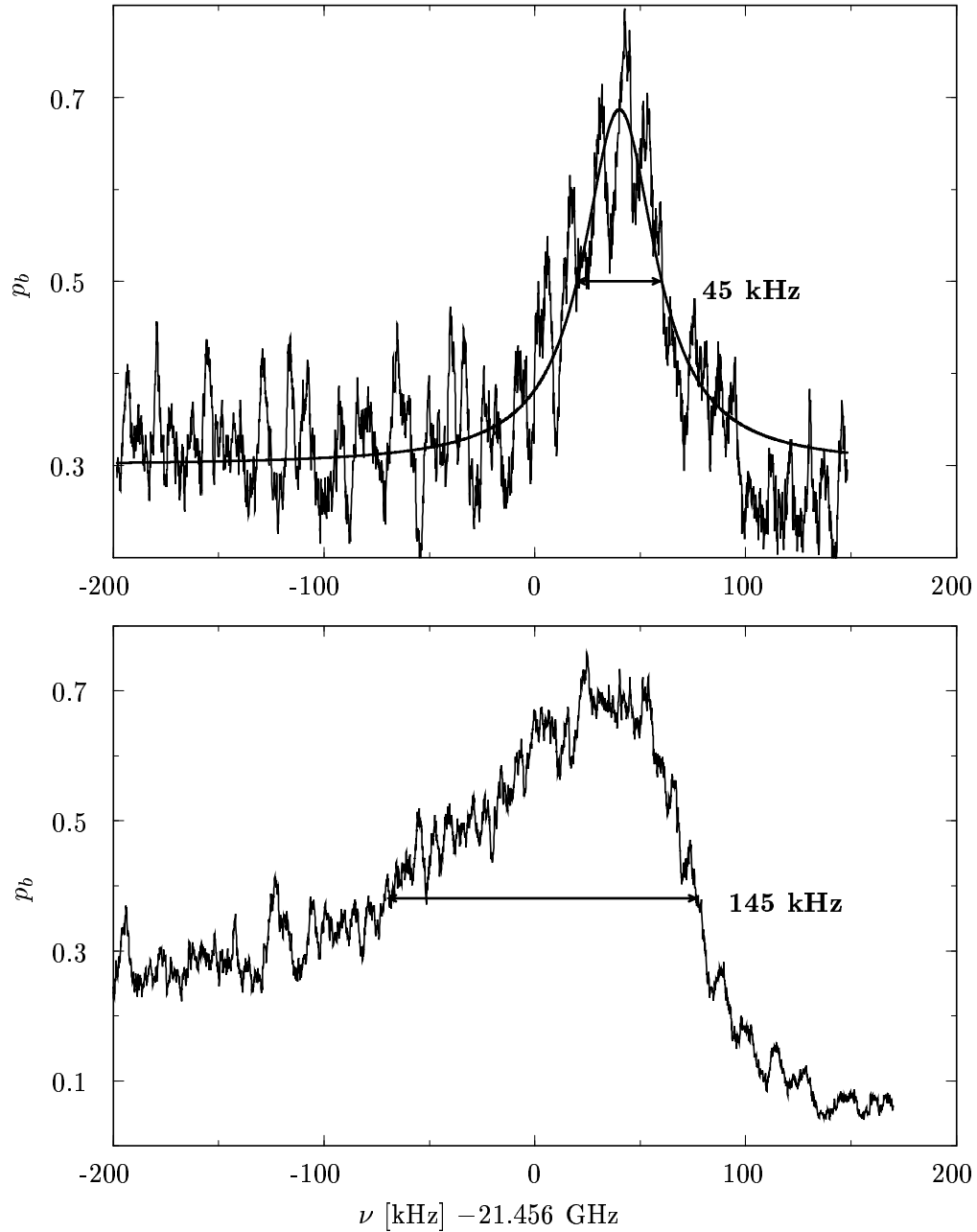


Abbildung 8.1: Resonatorinduzierter $63\text{P}_{3/2} \rightarrow 61\text{D}_{5/2}$ -Übergang von geschwindigkeitsselektierten Rubidium-Rydbergatomen. Die atomare Emissionswahrscheinlichkeit p_b – die Wahrscheinlichkeit, das Atom im unteren Zustand zu messen – wurde über die Resonanzfrequenz der Resonatormode aufgetragen. Die sehr schmale Linie im oberen Bild wurde bei einem niedrigen Atomfluß von 80 s^{-1} aufgenommen, die leistungsverbreiterte unten bei 270 s^{-1} .

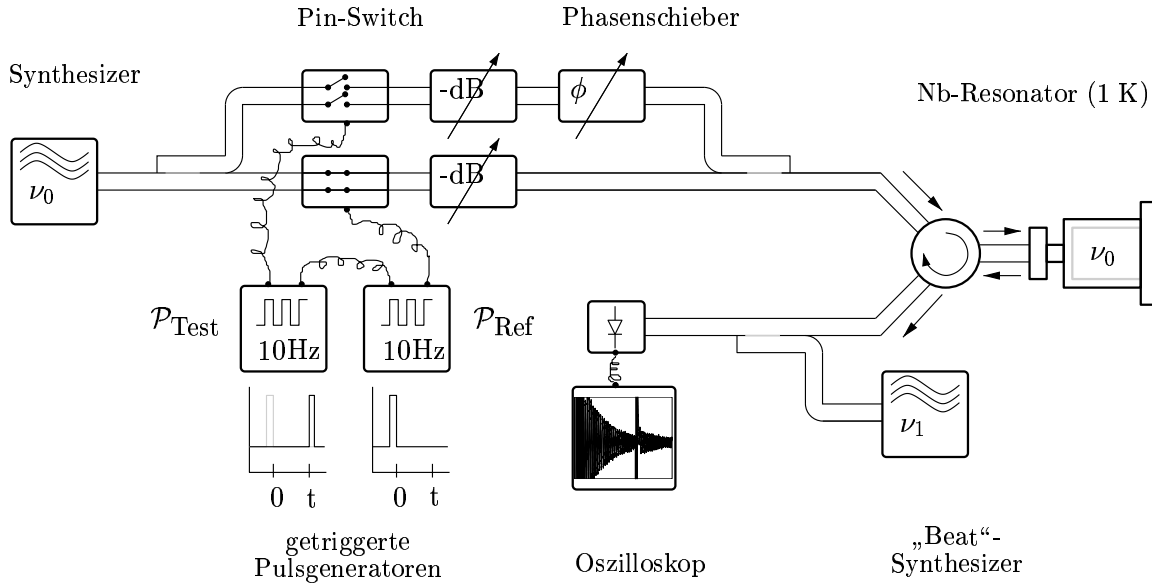


Abbildung 8.2: Mikrowellenaufbau zur Messung der Feld-Synthesizer-Kohärenz. Der Mikrowellensynthesizer ganz links ist resonant mit der Mikrowellenmode des Nb-Resonators, ganz rechts. Der Referenzpulsgenerator P_{Ref} schließt für eine kurze Zeit den unteren Pin-Schalter. Dadurch wird ein zum Synthesizer kohärent schwingendes Mikrowellenfeld erzeugt. Danach schwingen beide Felder unabhängig voneinander weiter. Die Kohärenz kann in diesem Stadium durch äußere Einflüsse, insbesondere mechanische Vibrationen des Resonators, gestört werden. Nach einer Zeit t wird durch einen zweiten getriggerten Rechteckgenerator P_{Test} ein Testpuls erzeugt, der mit dem Mikrowellenfeld interferiert. Bei bewahrter Kohärenz kann eine Einstellung mit destruktiver Interferenz gefunden werden.

Die vom Resonator emittierte Intensität wird über einen Zirkulator zur Mikrowellendiode weitergeleitet, nachdem sie vorher mit einem zweiten Synthesizer der Frequenz ν_1 überlagert wurde. Das detektierte Signal kann dann über einen Bandpaß für $\nu_0 - \nu_1$ an einem Speicheroszilloskop angezeigt werden.

8.2 Experimente mit Mikrowellenpulsen

Im Kapitel 3.1 des Theorieteils wurde die Zustandsverschiebung im Phasenraum beschrieben. Ein gegenüber der Modendämpfungszeit kurz eingestrahelter Mikrowellenpuls wirkt auf Feldzustände wie der kohärente Verschiebungsoperator. Diese für die zukünftigen Experimente entscheidende Eigenschaft wurde zunächst für hochangeregte, quasiklassische, Zustände getestet.

Dabei wird im ersten Schritt des Experimentes mit einem Mikrowellenpuls ein verschobener thermischer Zustand erzeugt, dessen Amplitude nach Gln. 3.4 proportional zur Fläche der Feldstärke multipliziert mit der Pulsdauer des eingestrahnten Synthesizers ist. Das darauffolgend frei relaxierende Resonatorfeld schwingt dann zunächst gleichphasig zu dem Synthesizerfeld weiter. Wie lange diese Phasenkohärenz im Experiment aufrecht erhalten werden kann, wird darauffolgend mit einem um 180° phasenverschobenen zweiten Puls getestet. Bei einer bestehenden Phasenkohärenz kann das im Resonator aufgebaute Feld mit dem eingestrahnten Puls bei geeigneter Wahl der Intensität und Einstrahldauer, destruktiv interferieren. Ist dagegen die Kohärenz durch äußere Störungen nicht mehr vorhanden, kann die Bedingung der vollständig destruktiven Interferenz, bei wiederholter Durchführung des Experimentes, nicht mehr gefunden werden.

Wie in Abb. 8.2 dargestellt, muß der Mikrowellenaufbau zwei zueinander phasenverschobene Pulse erzeugen können, was den Einsatz von schnellen Mikrowellenschaltern und Phasenschiebern erfordert. In den beschriebenen Experimenten wurden sogenannte Mikrowellen-Pin-Switches verwendet, die auf das K-Band optimiert sind und Schaltzeiten um 250 ns ermöglichen. Die Ansteuerung dieser Schaltelemente erfolgt über TTL-Pulse, die von Pulsgeneratoren mit variabler Länge erzeugt werden können. Die Länge des ersten Pulses (Referenzpuls) sollte so gewählt werden, daß bei resonanter Einstrahlung an der Detektordiode ein klar zu erkennendes exponentiell abfallendes Intensitätssignal sichtbar wird. Nach dem Abschalten des ersten Pulses wird zeitverzögert ein zweiter um 180° phasenverschobener Puls (Testpuls) eingestrahlt. Die Pulsdauer sollte kurz gegenüber der Modendämpfung gewählt werden, also grob abgeschätzt kleiner 1 ms, da bei diesem Experiment ja gerade die Verschiebung im Phasenraum getestet werden soll. Die Zeitdauer der Verzögerung des zweiten Pulses wird dabei natürlich durch die Zeitkonstante Γ^{-1} des exponentiell abfallenden Referenzsignals limitiert. Durch Veränderung der Intensität und Phase des Testpulses kann dann im Fall der bestehenden Kohärenz die Bedingung für destruktive Interferenz gefunden werden. In Abb. 8.3 sind die entsprechenden Fälle der konstruktiven und destruktiven Interferenz für zwei verschiedene Verzögerungszeiten dargestellt.

Eine Anmerkung zu den verwendeten *Mikrowellenleitern* sei noch hinzugefügt. Im K-Band (18-26 GHz) können sowohl spezielle Mikrowellenkoaxialkabel als auch rechteckige Metallhohlleiter verwendet werden. Da bei dem Aufbau der beiden zueinander phasenverschobenen *Wege* auf robuste Phasenstabilität zu achten ist, dürfen in diesem Bereich nur miteinander verschraubte Hohlleiter verwendet werden, da Koaxialkabel schon bei Berührung beträchtliche Phasenschwankungen verursachen würden.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die in Abb. 8.3 gezeigten Messungen die Realisierung von Zustandsverschiebungen im Phasenraum belegten und eine Phasenkohärenz bis zu 10.5 ms demonstriert haben, was beachtlichen $2.2 \cdot 10^8$ Schwingungsperioden entspricht.

8.3 Ein-Atom-Maser mit externer Einstrahlung

Als nächster Schritt in Hinblick auf die Phasendifusionsmessung muß die Atomstatistik bei EAM-Experimenten in Verbindung mit einer extern angeregten Resonatormode untersucht werden, da die Methode der verschobenen Felder die Wechselwirkung des mit einem klassischen Feld superponierten (oder verschobenen) quantenmechanischen Zustands erfordert.

Dazu werden in diesem Abschnitt zwei Messungen vorgestellt, bei denen die Feldintensität auf unterschiedliche Art und Weise variiert wird. Im ersten Fall sind die Resonatormode, die Synthesizerfrequenz und der atomare Übergang in Resonanz und die Intensität des Synthesizers wird direkt variiert. Im zweiten Fall wird der Synthesizer wieder resonant zu dem atomaren Übergang gestimmt, diesmal aber bei fester Intensität und Variation der Modenfrequenz durch Quetschen des Resonators. Dabei wird die Feldintensität im Resonator indirekt über die Synthesizer-Resonator-Verstimmung geregelt. Sind beide zueinander verstimmt, wird das eingestrahlte Mikrowellenfeld einfach an dem Koppelloch reflektiert. Ist die Verstimmung dagegen im Bereich der homogenen Linienbreite der Feldmode, wird gemäß des Resonator-Lorentz-Profiles zunehmend stärker eingekoppelt (siehe Gln. 3.18).

Da bei beiden Experimenten nur sehr geringe Mikrowellenintensitäten verwendet werden können, wurde die eingestrahlte Intensität um 70 dB abgeschwächt und ein auf 4 K abgekühltes Kupferblech zwischen zwei Hohlleiterenden im Kryostat eingebracht. **Alle Leistungsangaben** in diesem Abschnitt beziehen sich auf die Angabe des verwendeten Mi-

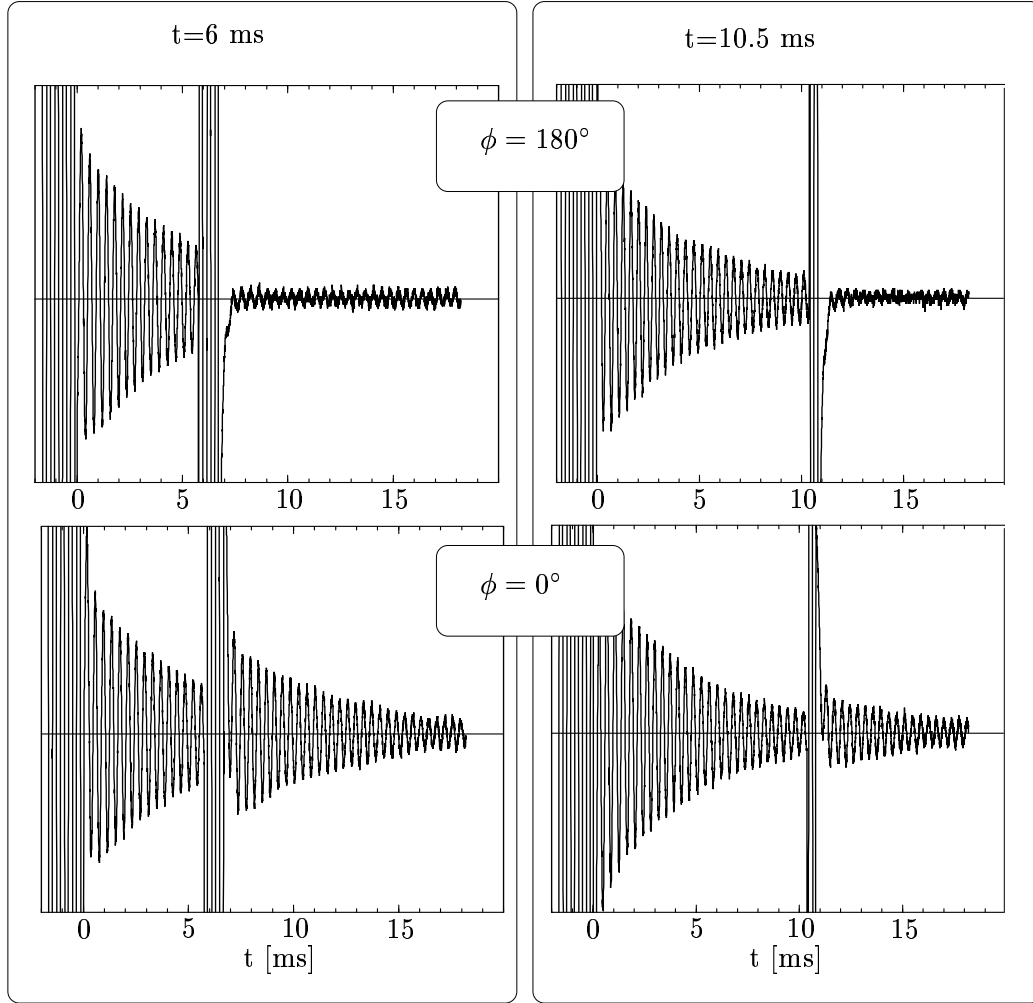


Abbildung 8.3: Nach der Methode von Abb. 8.2 gemessenes Mikrowellenüberlagerungssignal der Frequenz $\nu_0 - \nu_1 = 2.6$ kHz. Der Referenzpuls wurde zur Zeit $t=0$ ausgeschaltet. Das „frei schwingende“ Resonatorfeld interferiert dann nach einer Zeit t mit dem gleichen jedoch phasenverschobenen Synthesizerfeld. Bei 180° wird die durch den Referenzpuls erzeugte Feldstärke gerade wieder nach Null verschoben (oder genauer: in den thermisch angeregten Vakuumzustand)- destruktive Interferenz. Bei der 0° -Einstellung des Testpulses kann man konstruktive Interferenz beobachten. Hier hat sich die Amplitude verdoppelt.

Wie die rechte Spalte zeigt, konnte die Feld-Synthesizerkohärenz bis zu einer Zeit von 10.5 ms ($2.2 \cdot 10^8$ Perioden) aufrechterhalten werden.

krowellenverstärkers (HP) vor der Frequenzverdopplung.

8.3.1 Variation der Intensität

Welche Auswirkung wird nun die Einstrahlung auf die Atomstatistik nach der Wechselwirkung haben? Da bei dieser ersten Messung Resonatoren mittlerer Güte verwendet werden, so daß N_{ex} knapp unter 1 liegt, und das atomare Pumpen folglich gegenüber dem externen Feld vernachlässigt werden kann, erwartet man eine Wechselwirkung des Atoms mit einem durch den Synthesizer erzeugten kohärenten (verschobenen thermischen) Zustand. Bei

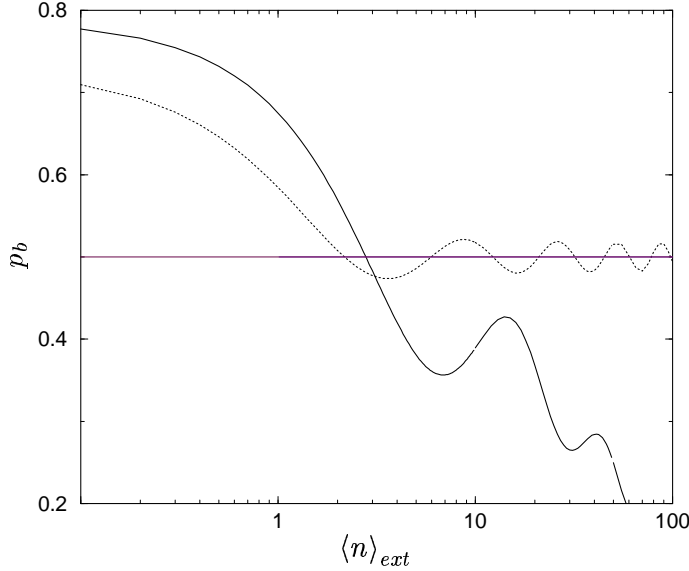


Abbildung 8.4: Numerische Simulation der resonanten Emissionswahrscheinlichkeit als Funktion der extern eingestrahlten (skalierten) Synthesizerintensität $\langle n \rangle_{ext} = 4|f|^2/\Gamma^2$. Verglichen wird der diabatische Grenzfall (···) mit der realistischen Rechnung, die statische elektrische Felder im Bereich der Resonatorkoppellöcher einschließt (—) und bei hohen Intensitäten einen adiabatisierungsbedingten Abfall zeigt.

Dabei wurde angenommen, daß das Feld hauptsächlich durch den Synthesizer aufgebaut wird ($N_{ex} = 0.01$) und die Resonatortemperatur 1 K beträgt. Um die numerische Simulation auch bei hohen Feldstärken durchführen zu können wurde hier die Mastergleichung im verschobenen Bild mit einer Runge-Kutta-Integration gelöst (siehe auch Kap. 3.3).

Weitere Parameter: $g\tau = 1.5$, $l = 1.5$.

Veränderung der eingestrahlten Intensität sollte man daher gemäß des Jaynes-Cummings-Modells Rabioszillationen der Emissionswahrscheinlichkeit um den Wert 0.5 erwarten, deren Amplitude jedoch je nach Wechselwirkungszeit und Modentemperatur mehr oder weniger reduziert sein kann. Dieses Verhalten wird auch durch die numerische Analyse in Abb. 8.4 (punktiierte Linie) bestätigt.

Im Gegensatz zu dieser ersten naheliegenden Vermutung, zeigte die Messung ein deutlich abweichendes Verhalten. Wie man in Abb. 8.5 erkennen kann, sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit (proportional zur Zählrate des zweiten Channeltrons, durchgezogene Linie) mit steigender Resonatorfeldstärke leicht oszillatorisch ab. Zwar können die Wellen der Meßkurve noch mit Rabioszillationen in Verbindung gebracht werden, ein Abfallen der Kurve auf die Emissionswahrscheinlichkeit 0 ist damit jedoch nicht zu erklären.

Bei diesem Phänomen mag man im ersten Augenblick an den durch dritte Atomzustände hervorgerufenen AC-Stark-Shift denken, der den EAM-Übergang bei hohen Feldstärken aus der Resonanz treiben könnte. Dies ist aber bei den hier auftretenden maximalen Feldstärken, die ein paar hundert Photonen entsprechen, auszuschließen, da bei diesen Feldintensitäten die AC-Stark-Verschiebung aufgrund der Kopplung des benachbarten $61D_{3/2}$ -Zustands (50 MHz Verstimmung zum EAM-Übergang) deutlich kleiner als die EAM-Übergangsbreite ausfällt.

Ein weiterer Grund könnte auch auf Mikrowellenionisation im Resonator zurückzuführen sein. Zeichnet man zum Beispiel anstatt der Einzelzählraten der beiden Channeltron-Detektoren, nur die Häufigkeit des unteren Zustands auf, würde die Einzelzählrate nicht nur bei wirklicher Umbesetzung, sondern auch bei Ionisation gegen Null streben. Wie man aber an der gestrichelten grauen Kurve der Messung in Abb. 8.5 erkennen kann, bleibt die Summe der Zählraten während des gesamten Scanbereichs nahezu konstant.

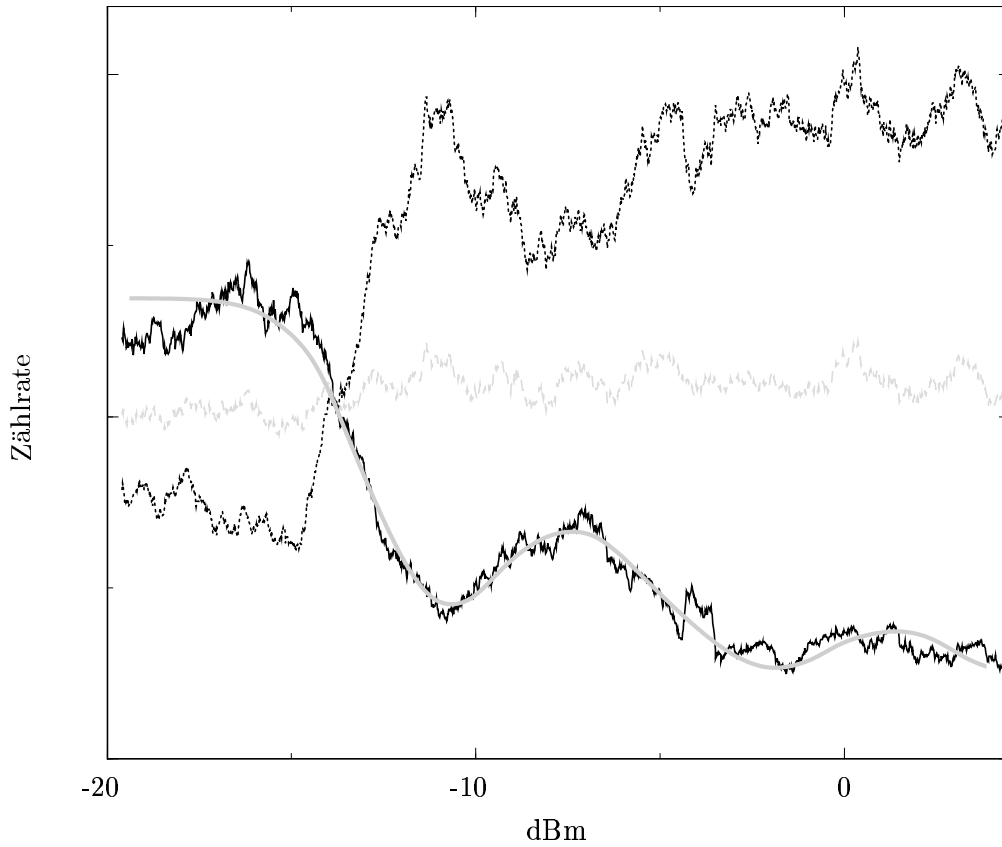


Abbildung 8.5: Zählraten des unteren (— , mit grauer Ausgleichskurve) bzw. oberen (— — —) Rydbergzustands über die eingestrahlte Synthesizerleistung aufgetragen. Zu der gewählten Synthesizerfrequenz von 21.45601 GHz waren sowohl die Feldmode, als auch der atomare Übergang resonant. Bei kleinen Intensitäten induziert das Resonatorfeld eine Umbesetzung der Rydbergzustände (mehr Atome im unteren Zustand). Bei einer skalierten Intensität von ca. -7 dBm erkennt man den ersten durch das externe Feld verursachte vollständige Rabizyklus. Für höhere Intensitäten wird die Umbesetzung zunehmend unterdrückt, da die Wechselwirkung mehr und mehr adiabatischen Charakter bekommt.

Mikrowellenionisation der Rydbergzustände kann in diesem Intensitätsregime ausgeschlossen werden, da der Mittelwert der beiden Zählraten konstant bleibt (gestrichelte graue Linie).

Schließlich erhärtete sich immer mehr der Verdacht, daß die mit größerer Resonatorfeldstärke zunehmende Adiabatizität der Atom-Feld-Wechselwirkung als die entscheidende Ursache für das Verschwinden der Emissionswahrscheinlichkeit gesehen werden kann. Tatsächlich zeigt die Theoriekurve in Abb. 8.4 einen dem Experiment sehr ähnlichen Verlauf. Auch hier strebt p_b für hohe Feldstärken gegen Null und zeigt während dem Abfall charakteristische Wellen, die die Reste der diabatischen Rabioszillationen repräsentieren.

Somit konnte man bei diesen Messungen zeigen, daß gerade bei höheren Feldintensitäten die Annahme der diabatischen Wechselwirkung verworfen werden muß und die Emissionswahrscheinlichkeit durch Berücksichtigung der immer stärker werdenden Adiabatizität zu korrigieren ist.

Um im weiteren ausschließen zu können, daß der gemessene Effekt auf der Wechselwirkung eines Atoms mit dem Synthesizerfeld außerhalb des Resonators beruht, werden im

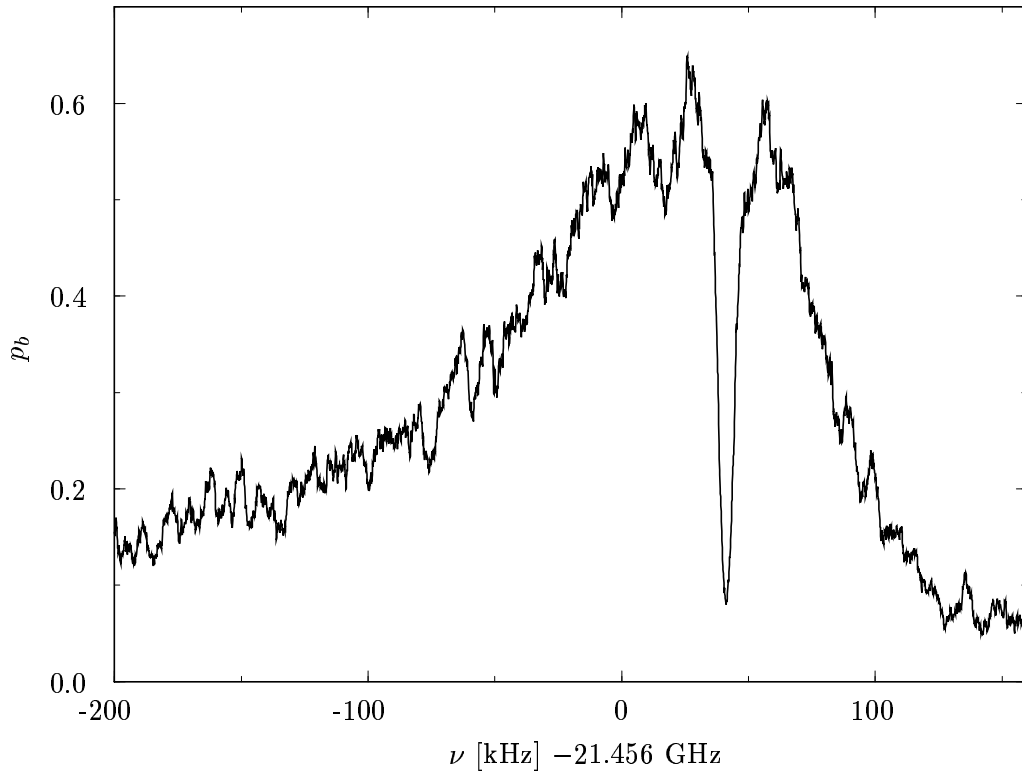


Abbildung 8.6: EAM-Resonanz bei zusätzlich eingestrahlter Mikrowelle der Frequenz 21.45604 GHz. Im Vergleich zu der Meßkurve ohne externe Anregung (vgl. Abb. 8.1, unten) zeigt die Emissionswahrscheinlichkeit im Bereich der Feld-Synthesizer-Resonanz einen deutlichen Einbruch. Dieser tiefe Einbruch kann mit starker Adiabaticität der Atom-Feld-Wechselwirkung in diesem Bereich erklärt werden.

Bei dieser Messung wurde mit 20.3 dBm (abzüglich der im Text besprochenen Abschwächer) eingestrahlt.

nächsten Abschnitt Messungen diskutiert, bei denen die Modenfrequenz bei fester Synthesizerintensität variiert wird. Die hier diskutierten Effekte sollten dann für hinreichend große Feld-Synthesizer-Verstimmung verschwinden, da die Strahlung in diesem Fall am Resonatorkoppelloch zurückreflektiert wird.

8.3.2 Ein-Atom-Maser Resonanz bei externer Einstrahlung

Es konnte noch ein weiteres Experiment zur Untersuchung der Atom-Feld-Wechselwirkung in Verbindung mit einer extern angeregten Resonatormode durchgeführt werden. Auch hier wurde der Synthesizer resonant zum atomaren Übergang eingestellt, die Intensität jedoch, im Gegensatz zum letzten beschriebenen Experiment, fixiert. Bei der Messung wurde dann die Resonatorfrequenz durch Quetschen des zylindrischen Mantels kontinuierlich verändert.

Da gemäß Gln. 3.18 eine Einkopplung nur für Verstimmungen innerhalb der homogenen Linienbreite relevant sein können, erwartet man für große Verstimmungen die EAM-Resonanzkurven ohne externe Einstrahlung. Dieses Verhalten wurde im Experiment, wie in Abb. 8.6 dargestellt, bestätigt. Für Bereiche außerhalb der eingestrahlten Frequenz von 21.45604 GHz ist die EAM-Resonanz nahezu identisch zu dem Fall ohne Synthesizer (vgl.

Abbildung 8.7: *Theoretischer Verlauf des Einbruchs in der EAM-Resonanz bei externer Einstrahlung mit einer (skalierten) Intensität der Stärke $\langle n \rangle_{ext} = 50$. Das bedeutet, daß sich bei resonanter Synthesizer-Feld-Kopplung ein stationärer Zustand mit einer mittleren Photonenzahl von 50 aufbauen würde. Charakteristisch ist hier wieder die zackige Substruktur, die den ersten und zweiten zusätzlichen Rabizyklus des Atoms kennzeichnet.*

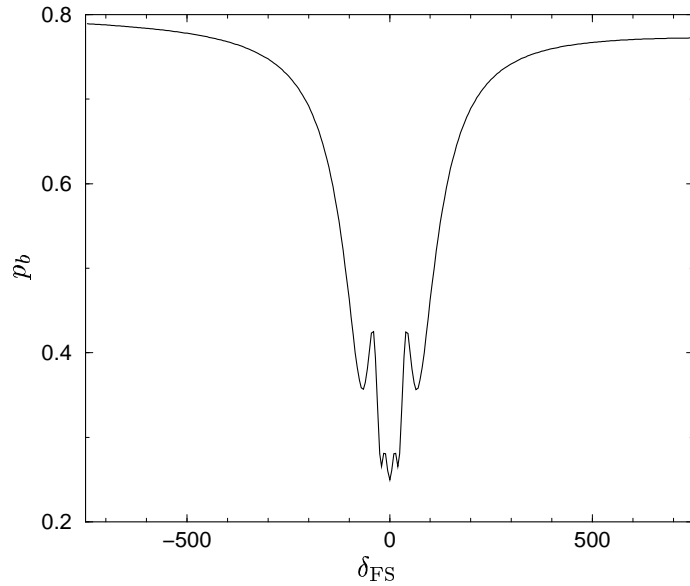


Abb. 8.1, unten). Erst bei Feld-Synthesizer-Resonanz kommt die Einkopplung zum Tragen und verändert die Atomstatistik. Folglich muß auch der im letzten Abschnitt besprochene Effekt auf die extern angeregte Feldmode zurückgeführt werden. Relevante Beeinflussungen des Atoms außerhalb des Resonators, insbesondere beim Durchqueren der Mikrowellenan-kopplung beim Resonatoraustrittsloch, können somit ausgeschlossen werden.

Auch bei der Messung in Abb. 8.6 zeigt sich im Bereich der Mikrowelleneinkopplung der für die Adiabatzität charakteristische Einbruch der Emissionswahrscheinlichkeit, der deutlich unter den diabatisch berechneten Mittelwert von 0.5 abfällt. Es sei noch ange-merkt, daß auch hier die Gesamtzählrate über den gesamten Scanbereich konstant blieb und Mikrowellenionisation ausgeschlossen werden kann.

Wenn man diese Messung mit der Theoriekurve in Abb. 8.7 vergleicht, sieht man, daß die Messung die zackige Substruktur noch nicht auflösen kann. Diese Substruktur ist wieder eine Signatur der durch die Adiabatzität abgeschwächten Rabizyklen des Atoms, da sich die Veränderung der Modenfrequenz im Bereich der homogenen Linienbreite nach Gln. 3.18 wie eine Intensitätsveränderung auswirkt.

Um nun diese Rabizyklen auch im Experiment auflösen zu können, muß die eingestrahlte Intensität verringert und der Variationsbereich der Modenfrequenz drastisch verkleinert werden. In den Messungen 8.8 wurde die eingestrahlte Intensität soweit reduziert, daß der „Dip“ bei Synthesizer-Feldmoden-Resonanz im Bereich der homogenen Linienbreite lag. Dement-sprechend mußte der Frequenzhub dieser Messungen um Faktor 200 verkleinert werden. Um die nötige Spannungsstufenauflösung für die Piezos zu erhalten, wurde zu diesem Zweck die Ansteuerspannung des Computers über einen 1:100 Teiler heruntergesetzt. Die bereits in der Theoriekurve vorhergesagten Stufen der Rabioszillationen, konnten dann tatsächlich auch experimentell nachgewiesen werden.

Die Anzahl der *Zacken* in diesen Messungen kann man nun mit den *Wellen* aus Abb. 8.5 vergleichen. Bei der oberen Meßkurve von Abb. 8.8 wurde eine konstante Intensität von 7.4 dBm eingestrahlt, was in Abb. 8.5 am rechten Rand nicht mehr ganz aufgenommen wurde. Tatsächlich sind bei beiden Messungen zwei Rabizyklen sichtbar. Im unteren Bild von Abb. 8.8 wurden dagegen nur -10 dBm verwendet und ein Rabizyklus aufgelöst. Nach

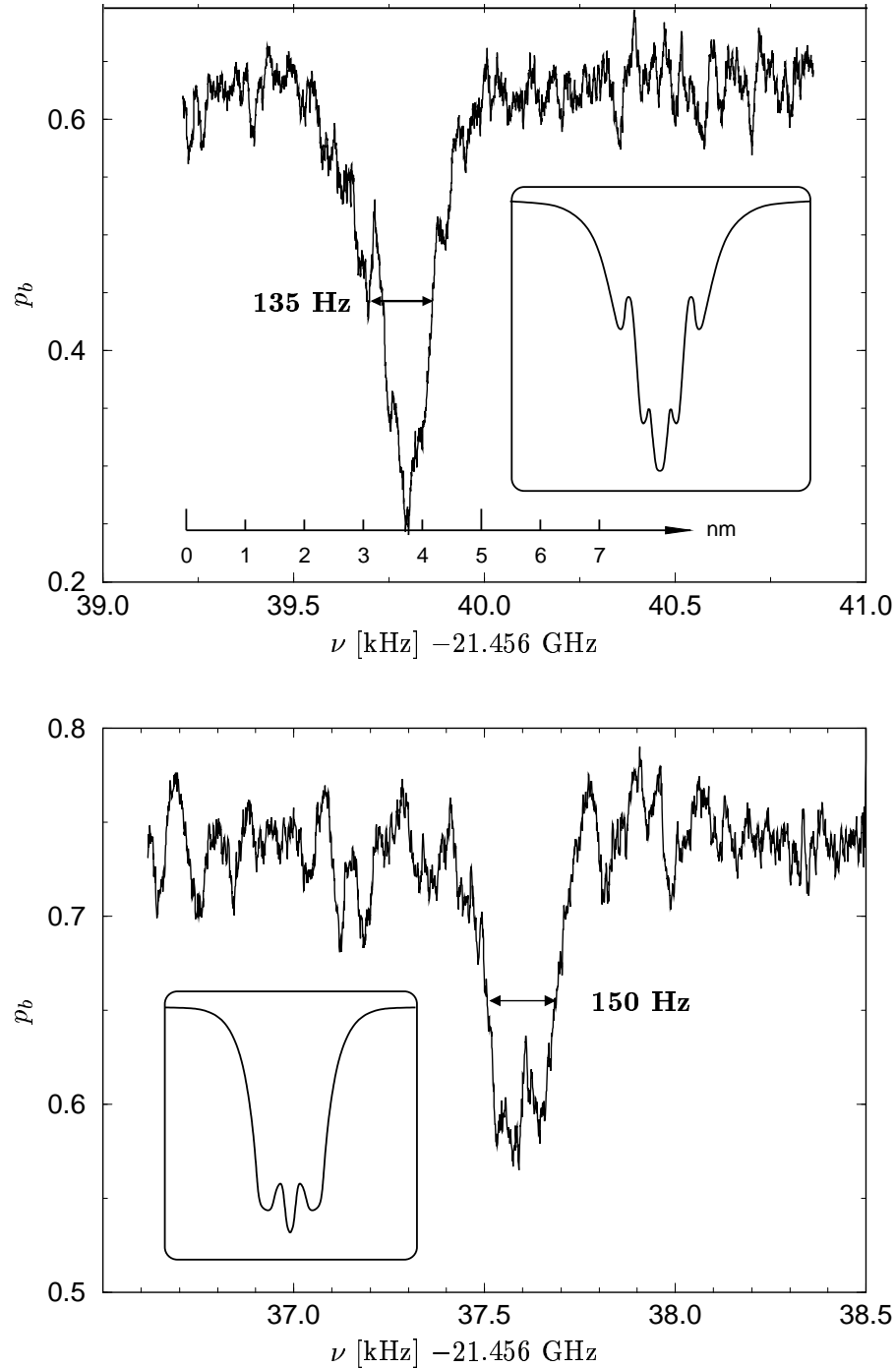


Abbildung 8.8: 200-fach vergrößerter Ausschnitt der EAM-Resonanz mit externer Einstrahlung. Bei dieser Messung konnten die durch das externe Feld bedingten Ansätze der Rabizyklen erstmals aufgelöst werden. Man beachte dabei den mikroskopischen Piezohub. Um beispielsweise eine Zacke in dem Einbruch der oberen Meßkurve abzutasten, müssen die Stellelemente den Resonatormantel um nur ca. 1/2 nm quetschen. Auch dies ist eine Demonstration der Vibrationsarmut des gesamten Aufbaus.

Bei der obigen Messung wurde mit einer Leistung von 7.4 dBm eingestrahlt, bei der unteren Messung mit -10 dBm (Leistungsangaben beziehen sich wie immer auf Werte vor der zusätzlichen starken Abschwächung).

dem direkten Frequenzscan in Abb. 8.5 sollte der erste Hügel allerdings erst bei ca. -7 dBm erscheinen. Als Grund für diese Abweichung kann ein Driften der Resonanzfrequenz während des Experiments gesehen werden, da hier bereits Deformationen des Resonators von wenigen Nanometern beträchtliche Abweichungen der Meßresultate erzeugen. So kann vermutet werden, daß die in Messung Abb. 8.5 eingestellte Synthesizerfrequenz möglicherweise leicht gegen die Modenfrequenz verstimmt war und die Rabizyklen erst bei etwas höheren Intensitäten gesehen wurden. Auch das Öffnen und Schließen des zur zusätzlichen Abschwächung verwendeten Kupferblechs ist nicht ganz reproduzierbar und erzeugt so auch Verschiebungen der Intensitätsskala. Bei zukünftigen Experimenten muß die Resonanzfrequenz deshalb noch sorgfältiger eingestellt werden.

8.4 Messung der Phasendiffusion

Im nächsten Schritt müssen die in Abschnitt 8.3 beschriebenen Pulsexperimente bei laufendem EAM-Experiment durchgeführt werden. Im Gegensatz zu den hier verwendeten eher moderaten Resonatorgüten, müssen dann Güten über 10^9 verwendet werden, so daß durch den Atomstrahl gepumpte Felder aufgebaut werden können. Der verwendete Resonator muß zu diesem Zweck neu ausgeheizt und zügig wieder in die Apparatur eingebaut werden.

Während des EAM-Betriebs muß dann nochmal wie bei Messung 8.5 festgestellt werden, ab welcher stationär eingestrahnten Intensität sich die Atomstatistik zu verändern beginnt. Die Intensität, die darauffolgend zum Seeden des Feldes verwendet wird, ist durch den Punkt gegeben, ab dem die Emissionswahrscheinlichkeit abzufallen beginnt (in Messung 8.5 ca. -15 dBm).

In der ersten Stufe des Experimentes können dann zunächst die Atomstatistiken des *geseedeten* Zustands kurz nach einem 0° -Puls mit denen eines 180° -Pulses verglichen werden. Wenn man zusätzlich jeweils die Pulslänge oder Pulsintensität verändert, sollten nach dem Prinzip der verschobenen Felder zwei unterschiedliche Kurven gemessen werden.

Die Frage nach der benötigten Pulsleistung beantworten die Formeln 3.4 und 3.18. Der daraus abgeleitete Zusammenhang für die eingesetzten Leistungen lautet in gebräuchlichen dBm-Einheiten

$$\begin{aligned} I_{\text{Puls}} &= I_{\text{Stat}} + \kappa & (8.1) \\ \kappa &= 10 \log 4 - 20 \log(\Gamma t) \\ I_{\text{Puls}} &\propto |f|^2 \rightarrow \text{Gln. 3.4} \\ I_{\text{Stat}} &\propto |f|^2 \rightarrow \text{Gln. 3.18.} \end{aligned}$$

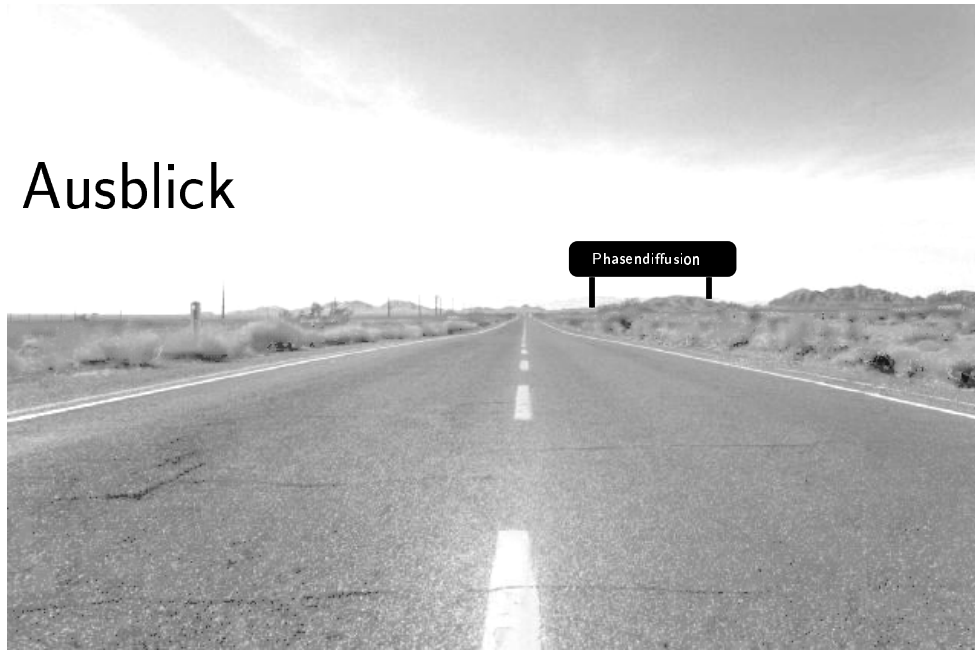
κ bestimmt dabei den Wert in dB, um wieviel die Mikrowellen-Abschwächung reduziert werden muß. Die so berechnete Pulsleistung gewährleistet dann eine Verschiebungsamplitude $|\gamma| = \sqrt{\langle n \rangle}$ (Gln. 3.4), die, auf den Vakuumzustand angewendet, einen kohärenten Zustand der Amplitude γ erzeugt. Koppelt man dagegen stationär mit einer um κ verminderten Leistung ein, wird nach Gln. 3.18 ein kohärenter Zustand gleicher Amplitude paräpariert.

Diese Messung ist dann für den Fall des phasenlosen EAM-Zustands zu wiederholen. Hier sollte sich keine Winkelabhängigkeit des Verschiebungspuls ergeben, da der Ausgangszustand im Phasenraum bekanntlich rotationssymmetrisch ist.

Schließlich kann dann die eigentliche Messung durchgeführt werden, indem man zwischen dem Phasen-Seeden und dem Verschiebungspuls eine Zeit t verstreichen läßt, in der die Phase des Feldes zerlaufen kann. Wenn bei diesen Messungen eine Zeitabhängigkeit erkennbar ist, kann schließlich die quantitative Messung, die auf mehreren Verschiebungsphasen beruht, durchgeführt werden (siehe Abschnitt 6.2.1).

Kapitel 9

Ausblick



Death Valley, California, 1999

Die Messungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, haben gezeigt, daß der qualitativen Messung der Phasendiffusion keine prinzipiellen Hürden mehr im Wege stehen. Dabei könnte das Zerlaufen einer präparierten Phase anhand von zwei, in entgegengesetzte Richtungen, verschobene Resonatorfelder und anschließendes Messen eines Atoms, nachgewiesen werden. Während die Emissionswahrscheinlichkeit nach der Wechselwirkung mit einem kohärenten Zustand (reelle Amplitude) nach einem 0° -Puls bzw. 180° -Puls im allgemeinen unterschiedlich sein wird, kommt es bei größer werdenden Wartezeiten zwischen Phasenpräparation und Messung nach der Zustandsverschiebung zu immer ähnlichen Werten. Ist die Phase schließlich gänzlich zerlaufen, wird die Emissionswahrscheinlichkeit unabhängig vom Winkel des Verschiebungspulses. Diese Messung würde erstmalig die Phasendekohärenz eines quantenmechanischen EAM-Feldes bestätigen.

Um nun auch quantitative Resultate zu erzielen, muß die vollständige Meßreihe der „Methode der verschobenen Felder“ aufgenommen werden. Das bedeutet, daß für jede Wartezeit nach dem Präparieren der Feldphase, die Emissionswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit mehrerer Pulsphasen zu bestimmen ist. Da die Messungen aufgrund des immer vorhandenen Drifts der experimentellen Parameter so schnell wie möglich durchgeführt werden

sollten, ist es zweckmäßig, die verschiedenen Pulsphasen über den bereits im Labor vorhandenen computeransteuerbaren Mikrowellenphasenschieber einzustellen. Diese Messung ermöglicht dann die gezielte Untersuchung der Phasendiffusion bei Variation des atomaren Flusses oder der Temperatur. Interessant wären dabei die Parameterbereiche des EAM, bei denen die Linienbreite bei steigender Temperatur abnimmt [91]. Ein Verhalten, das in der herkömmlichen Laser- oder Maserdynamik nicht auftritt. Ferner könnten Messungen bei unterschiedlichen Atomgeschwindigkeiten einen direkten Nachweis des, durch die Atom-Feld-Wechselwirkung verursachten, Phasenkicks erbringen.

Mit Hilfe dieser Datenreihen kann man neben der Extraktion phasendiffusionsrelevanter Daten, auch Kohärenzen höherer Ordnung untersuchen. Wie in Kapitel 6.2.3 erwähnt wurde, ist der k -te Fourierkoeffizient der Meßgröße $p_b(\gamma_0, \phi_l, t)$ allein eine Funktion der k -ten Dichtematrixnebendiagonale und enthält daher Informationen über den Zerfall höherer Amplitudenkorrelationen vom Typ $\langle [a^\dagger(t)]^k a(0)^k \rangle$. Dies ist ein Thema, das momentan in der Quantenoptik im Zusammenhang mit der Realisierung eines Quantencomputers und der Dynamik von „Schrödinger-Katzen“ viel diskutiert wird.

Weitere interessante Experimente könnten in die Richtung der Zustandsrekonstruktion des EAM-Feldes führen [76, 136, 137], weil gerade im EAM rein quantenmechanische (nicht-klassische) Mikrowellenzustände präpariert werden können. So konnten z.B. bereits 1990 rauschunterdrückte Zustände nachgewiesen werden [57, 58]. Weitere Zustände mit noch schmälerer Photonenstatistik, wie der sogenannte Fangzustand oder der *Fock-state*, konnten dieses Jahr ebenfalls experimentell beobachtet werden [74, 77]. Das direkte vollständige Vermessen solcher Zustände, würde einen nächsten Meilenstein bei den EAM-Experimenten darstellen, weil sie den ultimativen Beweis nichtklassischer Zustände im EAM erbringen würden. Wie können aber solche hochempfindlichen Zustände gemessen werden?

Da bekanntlicherweise das EAM-Feld nicht direkt detektiert werden kann, muß der Zustand mit Hilfe des Atomstrahls als Meßsonde ausgelesen werden. Wie bei der Phasendiffusionsmessung kann auch hier die bereits diskutierte „Methode der verschobenen Felder“ in zwei Variationen angewendet werden.

- *Tomographische Methode.* Der lineare Zusammenhang zwischen der Emissionswahrscheinlichkeit nach dem Verschieben eines Zustands um die komplexe Amplitude γ und den Elementen der Dichtematrix, erlaubt bei hinreichend vielen Verschiebungen, die Anpassung der am besten geeigneten Dichtematrixelementen an diese Messungen. Da der Zustand beispielsweise beim Verschieben auf einem Kreis, von Fockzuständen unter immer anderen Winkeln *durchleuchtet* wird, kann man die in [136] detailliert beschriebene Rekonstruktionsmessung als tomographische Methode klassifizieren [106].
- *Punktweises Vermessen einer Phasenraumdarstellung.* Wie in Abschnitt 6.2.2 dargestellt, erlaubt die „Methode der verschobenen Felder“ auch ein punktweises Messen einer Phasenraumfunktion des Feldzustands. Es handelte sich dabei um die charakteristische Wignerfunktion. Der Vorteil dieser Methode gegenüber der ersten ist, daß bereits mit einzelnen Messungen gezielt interessante Gebiete ausgewählt werden können, wie z.B. der Wertebereich, der die Kohärenz bei einer „Schrödinger-Katze“ widerspiegelt [137].

Die tomographische Methode birgt allerdings die Schwierigkeit in sich, daß sie auf der Inversion eines stark singulären Gleichungssystems beruht und somit Schwankungen experimenteller Parameter und Meßfehler extrem verstärkt werden. Trotz adäquater numerischer

Algorithmen, sollten nur Felder mit kleiner maximaler Photonenzahl rekonstruiert werden [76].

Bei der Zustandsrekonstruktion mit Hilfe der punktwisen Messung der charakteristischen Wignerfunktion muß als wesentliche Modifikation der momentanen EAM-Experimente dafür gesorgt werden, daß sehr kurze Wechselwirkungszeiten realisiert werden können und die Atom-Feld-Wechselwirkung bis zu hohen Feldamplituden diabatisch bleibt (siehe dazu Kapitel 4 und Abschnitt 6.2.2). Beides könnte durch Fixierung von Elektroden in zwei zusätzlichen Bohrungen durch die Resonatorwände verwirklicht werden. Natürlich müssen sowohl die Größe als auch die Positionen dieser Löcher so gewählt werden, daß die verursachten Auskoppelverluste vernachlässigbar bleiben. Günstige Positionen sind durch Nullstellen der elektrischen und magnetischen Feldkomponenten an der Resonatorwand gegeben.¹ Durch Anlegen einer Spannung könnten dann die Atome durch den Starkeffekt vom Resonatorfeld entkoppelt werden. Wird dieser Spannungspuls zusätzlich mit der Anregung eines Atoms getriggert, kann die Wechselwirkung im Resonator auf eine fast beliebig kurze Strecke reduziert werden. Dieses Wechselwirkungsschema hätte auch den Vorteil, daß durch die scharfen Spannungspuls-Flanken die Wechselwirkung wieder stärker diabatisch werden würde.²

Man kann also sagen, daß gerade mit dem neuen schwingungsgedämpften ^3He -Kryostat in Verbindung mit der „Methode der verschobenen Felder“, wieder sehr viele interessante Grundlagenexperimente möglich gemacht wurden, mit deren Realisation in naher Zukunft gerechnet werden kann.

¹Diese Bedingung ist gerade an den beiden Stirnflächen des zylindrischen Resonators bei 71.9 % des Radiuses und senkrecht zu der Piezoquetschrichtung (E-Richtung bei $r=0$) der Fall und genau am Rand der Stirnflächen, hier allerdings senkrecht zur E-Richtung

²Die Steilheit der Spannungsflanken wird allerdings durch die Adiabazitätsbedingung für diesen Prozeß limitiert, da sonst Umbesetzungen zu anderen atomaren Energieniveaus auftreten würden.

Anhang A

Unitäre Transformation der Bewegungsgleichung

Die Aufstellung einer quantenmechanischen Bewegungsgleichung erfordert zunächst die Wahl eines geeigneten Hilbertraums, als dessen Element der Systemzustand angegeben werden kann. Die zeitliche Entwicklung dieses Zustands, im allgemeinen durch die Dichtematrix ρ beschrieben, ist dann durch eine unitäre Transformation gegeben, bei der der Hamiltonoperator \mathcal{H} die Rolle des Erzeugers spielt.

Es ist oft praktikabel den Hamiltonoperator durch eine unitäre Transformation zu vereinfachen. Wenn nun auch alle beteiligten Operatoren, wie Dichtematrix und Observablen, entsprechend mittransformiert werden, sind die Mittelwerte dieser Größen invariant.

Transformation des Hamiltonoperators

Gegeben sei eine unitäre Transformation $\mathsf{T}(t)$, die den neuen Zustandsvektor $|\psi'(t)\rangle = \mathsf{T}(t)|\psi(t)\rangle$ erzeugt¹. Für den Hamiltonoperator \mathcal{H}' muß nun die transformierte Schrödingergleichung gelten

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'|\psi'(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt}|\psi'(t)\rangle \\ &= \mathsf{T}(t)i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle + i\hbar \frac{d\mathsf{T}(t)}{dt}|\psi(t)\rangle\end{aligned}\tag{A.1}$$

Die Rücktransformation $|\psi(t)\rangle = \mathsf{T}^\dagger|\psi'(t)\rangle$ eingesetzt, führt auf den transformierten Hamiltonoperator

$$\mathcal{H}'(t) = \mathsf{T}(t)\mathcal{H}(t)\mathsf{T}^\dagger(t) + i\hbar \left(\frac{d\mathsf{T}(t)}{dt} \right) \mathsf{T}^\dagger(t)\tag{A.2}$$

Wenn $\mathsf{T}(t) = \exp\{i/\hbar F(t)\}$ und $F(t)$ mit $dF(t)/dt$ vertauscht, kann der Hamiltonoperator im transformierten Bild als

$$\mathcal{H}'(t) = \mathsf{T}(t)\mathcal{H}(t)\mathsf{T}^\dagger(t) - \frac{dF(t)}{dt}.\tag{A.3}$$

geschrieben werden.

¹Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hier ein reiner Zustand vorausgesetzt, andernfalls verwende man die transformierte Dichtematrix $\rho'(t) = \mathsf{T}(t)\rho(t)\mathsf{T}^\dagger(t)$.

Transformation der Observablen

Sei $\mathcal{O}(t)$ eine Observable im ursprünglichen Bild. Für den Mittelwert $\langle \mathcal{O}(t) \rangle$ ist die Invarianzbedingung zu fordern

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}'(t) \rangle &= \langle \mathcal{O}(t) \rangle \\ \langle \psi'(t) | \mathcal{O}'(t) | \psi'(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \mathcal{O}(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi'(t) | \mathsf{T}(t) \mathcal{O}(t) \mathsf{T}^\dagger(t) | \psi'(t) \rangle\end{aligned}\tag{A.4}$$

Man entnimmt nun folgende Transformationsvorschrift für die Observable $\mathcal{O}(t)$

$$\mathcal{O}'(t) = \mathsf{T}(t) \mathcal{O}(t) \mathsf{T}^\dagger(t).\tag{A.5}$$

Observablen, die mit dem Transformationsoperator vertauschen, müssen offensichtlich **nicht** transformiert werden. Man kann in diesem Fall den Mittelwert direkt mit dem transformierten Zustand berechnen. Beispiele dafür sind Mittelwerte des Photonenzahloperators im Wechselwirkungsbild, als Gegenbeispiel sei an die mittlere Feldstärke im Wechselwirkungsbild erinnert.

Nützliche Formeln

Bei den in dieser Arbeit verwendeten Transformationen werden häufig folgende Relationen verwendet

$$\begin{aligned}e^{i\omega t a^\dagger a} a e^{-i\omega t a^\dagger a} &= e^{-i\omega t} a \\ e^{\frac{i}{2}\omega t \sigma_z} c e^{-\frac{i}{2}\omega t \sigma_z} &= e^{-i\omega t} c \\ [\mathsf{D}, a] &= -\alpha \mathsf{D} \\ [\mathsf{D}, a^\dagger a] &= -\mathsf{D} \left(\alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2 \right) \\ \mathsf{D}^\dagger(\alpha) f(a, a^\dagger) \mathsf{D}(\alpha) &= f(a + \alpha, a^\dagger + \alpha^*)\end{aligned}\tag{A.6}$$

mit dem Verschiebungsoperator

$$\mathsf{D} = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\tag{A.7}$$

Anhang B

Fockdarstellung der Ein-Atom-Maser Mastergleichung

Die Mastergleichung der reduzierten Felddichtematrix ρ lautet

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \mathcal{M}\rho \\ &= (\mathcal{L} + r(\mathcal{A} + \mathcal{B} - 1))\rho.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Die beiden Meßoperatoren \mathcal{A}, \mathcal{B} auf die Dichtematrix des Feldes angewendet, beschreiben dabei den Feldzustand nach der Atom-Feld-Wechselwirkung unter der Voraussetzung, daß das Atom im Zustand $|a\rangle$ bzw. $|b\rangle$ gemessen wurde. Mit Berücksichtigung einer möglichen Atom-Feld-Verstimmung können sie in Operatorform als

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\circ &= \left[\cos\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) - i\frac{\delta_{\text{AF}}}{\Delta} \sin\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) \right] \circ \left[\cos\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) + i\frac{\delta_{\text{AF}}}{\Delta} \sin\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) \right] \\ \mathcal{B}\circ &= a^\dagger \frac{2g}{\Delta} \sin\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) \circ \sin\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) \frac{2g}{\Delta} a\end{aligned}\tag{B.2}$$

ausgedrückt werden. Dabei wurde der *Rabifrequenzoperator* $\Delta = \sqrt{\delta_{\text{AF}}^2 + 4g^2 aa^\dagger}$ eingeführt. Für den Fall der Resonanz ($\delta_{\text{AF}} = 0$) vereinfachen sich die Operatoren zu

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\circ &= \cos(\sqrt{aa^\dagger}g\tau) \circ \cos(\sqrt{aa^\dagger}g\tau) \\ \mathcal{B}\circ &= a^\dagger \frac{\sin(\sqrt{aa^\dagger}g\tau)}{\sqrt{aa^\dagger}} \circ \frac{\sin(\sqrt{aa^\dagger}g\tau)}{\sqrt{aa^\dagger}} a.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Die Ankopplung an das Wärmebad erfolgt über den Liouville-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\circ &= -\frac{\Gamma}{2}(n_{th} + 1) \left[a^\dagger a \circ -2a \circ a^\dagger + \circ a^\dagger a \right] \\ &\quad -\frac{\Gamma}{2}n_{th} \left[aa^\dagger \circ -2a^\dagger \circ a + \circ aa^\dagger \right].\end{aligned}\tag{B.4}$$

In Fockdarstellung entkoppeln die Nebendiagonalen, so daß die Mastergleichung als eine Schar von unabhängigen Bewegungsgleichungen geschrieben werden kann. Zweckmäßigerweise führt man folgende Vektornotation ein

$$\left[\mathbf{x}^{(k)} \right]_n = \rho_n^{(k)} \equiv \langle n | \rho | n + k \rangle\tag{B.5}$$

und kann somit die Mastergleichung für eine beliebige Nebendiagonale als Matrixgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}}^{(\mathbf{k})} = \mathbf{M}^{(\mathbf{k})} \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} \quad (\text{B.6})$$

schreiben. Bei Resonanz und Verwendung der skalierten Zeit $t' = \Gamma t$ erhält man für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} M_{n,n-1}^{(k)} &= N_{ex} \sin(g\tau\sqrt{n}) \sin(g\tau\sqrt{n+k}) \\ &\quad + n_b \sqrt{n(n+k)} \\ M_{n,n}^{(k)} &= -N_{ex} \left[1 - \cos(g\tau\sqrt{n+1}) \cos(g\tau\sqrt{n+1+k}) \right] \\ &\quad - (n_b + 1) \left(n + \frac{k}{2} \right) - n_b \left(n + 1 + \frac{k}{2} \right) \\ M_{n,n+1}^{(k)} &= (n_b + 1) \sqrt{(n+1)(n+1+k)}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Anhang C

Emissionswahrscheinlichkeit nach dem Verschieben

Die Emissionswahrscheinlichkeit des Atoms (=Wahrscheinlichkeit für die Messung des unteren Zustands $|b\rangle$) nach der Wechselwirkung mit einem um die komplexe Amplitude γ im Phasenraum verschobenen Feldzustand, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_b(\gamma) &= \text{Tr} \left\{ \underbrace{D(\gamma) \rho D^\dagger(\gamma)}_{\rho \xrightarrow{\gamma}} \sin^2(g\tau \sqrt{a^\dagger a + 1}) \right\} \\ &= \text{Tr} \left(\rho \sin^2(g\tau \sqrt{(a^\dagger + \gamma^*)(a + \gamma) + 1}) \right) \\ &= \langle \mathcal{O}^{(\gamma)} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Erfolgt die Spurbildung in der Fockbasis, so erhält man mit $\gamma = \gamma_0 e^{i\phi}$

$$\begin{aligned} p_b(\gamma_0 e^{i\phi}) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin^2(g\tau \sqrt{m+1}) \mathcal{X}_{mn}^{(0)}(\gamma_0) \rho_n^{(0)} \\ &+ 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin^2(g\tau \sqrt{m+1}) \mathcal{X}_{mn}^{(k)}(\gamma_0) \rho_n^{(k)} e^{ik\phi} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

mit den Koeffizienten

$$\mathcal{X}_{mn}^{(k)}(\gamma_0) e^{ik\phi} = d_{mn}(\gamma_0 e^{i\phi}) d_{(n+k)m}(-\gamma_0 e^{i\phi}) \quad (\text{C.3})$$

und den Matrixelementen des Verschiebungsoperators in Fockdarstellung

$$d_{nm}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^{n-m} e^{i(n-m)\phi} L_m^{n-m}(r^2) & \text{für } n \geq m \\ d_{mn}^*(-\alpha) & \text{für } n \leq m. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Die verallgemeinerten Laguerrepolynome sind als Potenzreihe gegeben durch

$$L_m^\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \binom{m+\alpha}{m-\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}. \quad (\text{C.5})$$

Geht man nun auf die kompakte Vektorschreibweise über, so kann man die Emissionswahrscheinlichkeit übersichtlicher schreiben als

$$\begin{aligned}
 p_b(\gamma) &= \mathbf{y}^{(0)} \mathbf{x}^{(0)} + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{y}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} e^{ik\phi} \\
 &= q^{(0)} + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} q^{(k)} e^{ik\phi}
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

mit den Vektorkomponenten

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{x}^{(k)} \right]_n &= \rho_n^{(k)} \equiv \langle n | \rho | n+k \rangle \\
 \left[\mathbf{y}^{(k)} \right]_n &= \sum_{m=0}^{\infty} \sin^2(g\tau\sqrt{m+1}) \mathcal{X}_{mn}^{(k)}(\gamma_0).
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Gerade in Gln. C.6 erkennt man erstens den linearen Zusammenhang zwischen der Emissionswahrscheinlichkeit und *allen* Dichtematrixelementen. Zweitens hat die Gleichung die Gestalt einer Fouriersumme, dessen k -ter Fourierkoeffizient $\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} = q^{(k)}$ nur von der k -ten Nebendiagonale der Dichtematrix abhängt.

Anhang D

Atomarer Anteil der Phasendiffusion

Wie in Abb. 5.1 dargestellt, wird ein präparierter kohärenter Zustand durch die Jaynes-Cummings-Dynamik in zwei phasenverschobene Anteile gleicher Amplitude aufgespalten

$$|\alpha\rangle \Rightarrow |\alpha e^{i\Delta\Phi}\rangle, |\alpha e^{-i\Delta\Phi}\rangle. \quad (\text{D.1})$$

In der folgenden Betrachtung wird auf einen klassischen Phasenraum übergegangen, in dem die einzelnen Amplituden als mit Wahrscheinlichkeiten gewichtete (komplexe) Punkte dargestellt werden. Da die Phasenkicks immer die gleiche Größe $\Delta\Phi$ haben, können nur Phasenraumpunkte der Art $\alpha_m = e^{im\Delta\Phi}$ mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ auftreten. Der Zustand nach der Wechselwirkung des ersten Atoms lautet dann

$$\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_{-1}. \quad (\text{D.2})$$

Natürlich spielen hier die von der Messung am System induzierten Unterschiede keine Rolle mehr, da es sich hier um einen klassischen stochastischen Prozeß auf einem Kreis handelt.

Offensichtlich lautet in diesem Bild der Zustand nach der Wechselwirkung mit dem zweiten Atom

$$\frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_{-2}, \quad (\text{D.3})$$

und nach m Wechselwirkungen erhält man als Wahrscheinlichkeit für die Besetzung der j -ten Amplitude

$$W_{mj} = \begin{cases} \binom{j}{\frac{m+j}{2}} 2^{-j} & \text{für } m+j \text{ gerade und } |m| \leq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Da nun der zeitliche Atom-Atom-Abstand poissonverteilt ist und somit die Wahrscheinlichkeit j Atome im Intervall t anzutreffen

$$p_j(t) = e^{-rt} \frac{(rt)^j}{j!} \quad (\text{D.5})$$

lautet, müssen die Besetzungswahrscheinlichkeiten W_{mj} über die Poissonverteilung gemittelt werden. Man erhält die mittlere Besetzungswahrscheinlichkeit der m -ten Amplitude nach einer Zeit t

$$\bar{W}_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) W_{mj}. \quad (\text{D.6})$$

Nun kann direkt die mittlere Feldamplitude nach einer Zeit t berechnet werden. Es gilt¹

$$\overline{\alpha(t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \bar{W}_m(t) = e^{-rt} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=-j \\ m+j \text{ gerade}}}^j e^{im\Delta\Phi} \frac{\left(\frac{rt}{2}\right)^j}{\left(\frac{j+m}{2}\right)!\left(\frac{j-m}{2}\right)!}. \quad (\text{D.7})$$

Setzt man im folgenden $\tilde{m} = \frac{1}{2}(m+j)$, $A = (rt/2)e^{i\Delta\Phi}$ und $B = (rt/2)e^{-i\Delta\Phi}$, so erhält man

$$\overline{\alpha(t)} = e^{-rt} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\tilde{m}=0}^j \frac{A^{\tilde{m}} B^{j-\tilde{m}}}{\tilde{m}!(j-\tilde{m})!} = e^{-rt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} = e^{-rt} e^A e^B. \quad (\text{D.8})$$

Dabei wurde die Cauchysche-Produktformel verwendet [15]. Die Rücksubstitution führt auf folgendes einfache Ergebnis

$$\overline{\alpha(t)} = e^{-\frac{1}{2}D_A t} \quad \text{mit} \quad D_A = 4r \sin^2 \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right). \quad (\text{D.9})$$

Zusammen mit dem Winkel für die Phasenverschiebung $\Delta\Phi = g\tau/2\sqrt{\langle n \rangle}$, erhält man das bereits aus der Mastergleichung abgeleitete wohlbekannte Ergebnis [86], das hier allerdings den Zusammenhang zu den Phasenkicks der Atom-Feld-Wechselwirkung offenlegt.

¹Die Rechnung wird in einem mit der Feldfrequenz rotierenden Bezugssystem ausgeführt.

Literaturverzeichnis

- [1] E.Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, Die Naturwissenschaften **28**, 664 (1926).
- [2] E.M.Purcell, *Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies*, Phys. Rev. **69**, 681 (1946).
- [3] D.Bohm, *Quantum Theory*, Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, Inc (1951).
- [4] P.A.M.Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford: Clarendon (1958).
- [5] A.L.Schawlow and C.H.Townes, *Infrared and Optical Masers*, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).
- [6] R.J.Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [7] H.Haken, *Quantenfeldtheorie des Festkörpers*, B.G.Teubner, Stuttgart (1973).
- [8] W.H.Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley & Sons, New York (1973).
- [9] F.P.Schäfer (Ed.), *Dye Lasers*, Springer-Verlag, Berlin (1974).
- [10] M.Sargent III, M.O.Scully, and W.E.Lamb, Jr., *Laser Physics*, Addison-Wesley, London (1974).
- [11] K.H.Drexhage, *Progress in Optics* **12**, ed. E.Wolf, North-Holland, Amsterdam (1974).
- [12] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1975).
- [13] L.Mandel, *Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence*, Opt. Lett. **4**, 205 (1979).
- [14] H.Risken, *Vorlesung: Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik*, Manuskript WS 1979/80, Universität Ulm.
- [15] I.N.Bronstein and K.A.Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, 21.Aufl., Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main (1981).
- [16] P.Goy, J.M.Raimond, M.Gross, and S.Haroche, *Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1903 (1983).
- [17] K. Shimoda, *Introduction to Laser Physics*, Springer Verlag, Berlin (1984).

- [18] M.Hillery, R.F.O'Connell, M.O.Scully, and E.P.Wigner, *Distribution Functions in Physics: Fundamentals*, Phys. Rep. **106**, 122 (1984).
- [19] H.Haken, *Laser Light Dynamics, Vol.1& 2*, North-Holland, Amsterdam (1985).
- [20] K.-H.Hellwege, *Einführung in die Festkörperphysik*, 3. Aufl., Springer Verlag, Berlin (1988).
- [21] W.Schleich, D.F.Walls, and J.A.Wheeler, *Area of overlap and interference in phase space versus Wigner pseudoprobabilities*, Phys. Rev. A **38**, 1177 (1988).
- [22] M.Weissbluth, *Photon-Atom Interaction*, Academic Press, London (1989).
- [23] P.Meystre and M.Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer Verlag, Berlin (1990).
- [24] E.Fick and G.Sauermann, *The Quantum Statistics of Dynamic Processes*, Springer Verlag, Berlin (1990).
- [25] J.Eichler and H.-J.Eichler, *Laser*, Springer Verlag, Berlin (1990).
- [26] Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*, 9. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, München (1991).
- [27] J.P.Dowling, W.P.Schleich, and J.A.Wheeler, *Interference in Phase Space*, Ann. Phys. **48**, 423, Leipzig (1991).
- [28] H.J.Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, ULB Lectures in Nonlinear Optics Fall 1991, Institute of Theoretical Science, University of Oregon, Eugene, Oregon.
- [29] F.Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [30] Y.Yamamoto and R.E.Slusher, *Optical Processes in Microcavities*, Physics Today, June, 66 (1993).
- [31] D.F.Walls and G.J.Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [32] W.Vogel and D.-G.Welsch, *Lectures on Quantum Optics*, Akademie Verlag, Berlin (1994).
- [33] L.Mandel and E.Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [34] H.Risken, *The Fokker-Planck Equation*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin (1996).

Jaynes-Cummings-Modell

- [35] R.P.Feynman, F.L.Vernon, Jr., and R.W.Hellwarth, *Geometrical Representation of the Schrödinger Equation for Solving Maser Problems*, J. Appl. Phys. **28**, 49 (1957).
- [36] E.T.Jaynes and F.W.Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc.IEEE - special issue on quantum electronics **51**, 89 (1963).

- [37] B.R.Mollow, *Pure-state analysis of resonant Light scattering; radiative damping, saturation, and multiphoton effect*, Phys. Rev. A **12**, 1919 (1975).
- [38] J.H.Eberly, N.B.Narozhny, and J.J.Sanchez-Mondragon, *Periodic Spontaneous Collapse and Revival in a Simple Quantum Model*, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
- [39] N.B.Narozhny, J.J.Sanchez-Mondragon, and J.H.Eberly, *Coherence versus incoherence: Collapse and revival in a simple quantum model*, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
- [40] W.E.Lamb, Jr., R.R.Schlicher, and M.O.Scully, *Matter-field interaction in atom physics and quantum optics*, Phys. Rev. A **36**, 2763 (1987).
- [41] J.Eiselt and H.Risken, *Quasiprobability distributions for the Jaynes-Cummings model with cavity damping*, Phys. Rev. A **43**, 346 (1991).
- [42] J.Gea-Banacloche, *Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields*, Phys. Rev. A **44**, 5913 (1991).
- [43] P.Alsing, D.-S.Guo, and H.J.Carmichael, *Dynamic Stark effect for the Jaynes-Cummings system*, Phys. Rev. A **45**, 5135 (1992).
- [44] M.Fleischhauer and W.P.Schleich, *Revivals made simple: Poisson summation formula as a key to the revivals in the Jaynes-Cummings model*, Phys. Rev. A **47**, 4285 (1993).
- [45] I.V.Iyotsna and G.S.Agarwal, *The Jaynes-Cummings model with continuous external pumping*, Opt. Comm. **99**, 344 (1993).
- [46] G.S.Agarwal, W.Lange, and H.Walther, *Intense-field renormalization of cavity-induced spontaneous emission*, Phys. Rev. A **48**, 4555 (1993).
- [47] A.Mostafazadeh, *Quantum adiabatic approximation and geometric phase*, Phys. Rev. A **55**, 1653 (1997).

Ein-Atom-Maser

- [48] D.Meschede, H.Walther, and G.Müller, *One-atom maser*, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).
- [49] P.Filipowicz, J.Javanainen, and P.Meystre, *Theory of a microscopic maser*, Phys. Rev. A **34**, 3077 (1986).
- [50] J.Krause, M.O.Scully, and H.Walther, *Quantum theory of the micromaser: Symmetry breaking via off-diagonal atomic injection* Phys. Rev. A **34**, 2032 (1986).
- [51] G.Rempe, H.Walther, and N.Klein, *Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [52] L.A.Lugiato, M.O.Scully and H.Walther, *Connection between microscopic and macroscopic maser theory*, Phys. Rev. A **36**, 740 (1987).
- [53] P.Meystre, G.Rempe, and H.Walther, *Very-low-temperature behavior of a micromaser*, Opt. Lett. **13**, 1087 (1988).

- [54] J.Krause, M.O.Scully, Th.Walther, and H.Walther, *Preparation of a pure number state and measurement of the photon statistics in a high-Q micromaser*, Phys. Rev. A **39**, 1915 (1989).
- [55] A.M.Guzman, P.Meystre, and E.M.Wright, *Semiclassical theory of a micromaser*, Phys. Rev. A **40**, 2471 (1989).
- [56] S.Haroche, *Course XXX, Cavity Quantum Electrodynamics*, Les Houches, Session LIII (1990).
- [57] G.Rempe, F.Schmidt-Kaler, and H.Walther, *Observation of sub-Poissonian photon statistics in a micromaser*, Phys. Rev. Lett **64**, 2783 (1990).
- [58] G.Rempe and H.Walther, *Sub-Poissonian atomic statistics in a micromaser*, Phys. Rev. A **42**, 1650 (1990).
- [59] G.Raithel, C.Wagner, H.Walther, L.M.Narducci, and M.O.Scully, *The micromaser: A proving ground for quantum physics*, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Supp.2, Cavity Quantum Elektrodynamics, P.R. Bermann (Hrsg.), Academic Press (1993).
- [60] O.Benson, G.Raithel, and H.Walther, *Quantum jumps of the micromaser field: Dynamic behavior close to phase transition points*, Phys. Rev. Lett **72**, 3506 (1994).
- [61] B.-G.Englert, *Elements of Micromaser Physics*, 19th International Nathiagali Summer College on Physics and Contemporary Needs, Nathiagali (1994).
- [62] G.Raithel, O.Benson, and H.Walther, *Atomic interferometry with the micromaser*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3446 (1995).
- [63] O.J.Benson, *Experimentelle Untersuchung von Bistabilität und Atominterferenz im Ein-Atom-Maser*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [64] G.Raithel, *Rydbergatome - vom klassischen Grenzfall zur quantenmechanischen Realität*, Habilitation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [65] G.Antesberger, *Aufbau eines schwingungsgedämpften Ein-Atom-Masers zur Beobachtung der Phasendiffusion mit zirkularen Rydbergzuständen*, externe Diplomarbeit Universität Ulm, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [66] M.Löffler, B.-G.Englert, and H.Walther, *Testing a Bell-type inequality with a micromaser*, Appl. Phys. B **63**, 511 (1996).
- [67] M.Elk, and P.Lambropoulos, *Connection between approximate Fokker-Planck equations and the Wigner function applied to the micromaser*, Quantum Semiclass. Opt. **8**, 23 (1996).
- [68] M.Brune, F.Schmidt-Kaler, A.Maali, J.Dreyer, E.Hagley, J.M.Raimond, and S.Haroche, *Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).

- [69] M.Brune, E.Hagley, J.Dreyer, X.Maître, A.Maali, C.Wunderlich, J.M.Raimond, and S.Haroche, *Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).
- [70] O.Benson, M.Weidinger, G.Raithel, and H.Walther, *Atomic interference in the micromaser and statistical properties of the micromaser field*, J. Mod. Opt. **44**, 2011 (1997).
- [71] R.R.McGowan, and W.C.Schieve, *Micromaser with injected atomic phase*, Phys. Rev. A **56**, 2373 (1997).
- [72] B.-G.Englert, M.Löffler, O.Benson, B.Varcoe, M.Weidinger, and H.Walther, *Entangled atoms in micromaser physics*, Fortschritte der Physik **46**, 897 (1998).
- [73] R.R.McGowan, and W.C.Schieve, *Theory of detection in the micromaser*, Phys. Rev. A **59**, 778 (1999).
- [74] M.Weidinger, B.T.H.Varcoe, R.Heerlein, and H.Walther, *Trapping states in the micromaser*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3795 (1999).
- [75] M.Weidinger, *Rydbergatome im modifizierten Vakuumfeld*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1999).
- [76] C.Bodendorf, *Untersuchungen am Ein-Atom-Maser mit externer Einkopplung*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1999).
- [77] B.T.H.Varcoe, S.Brattke, M.Weidinger, and H.Walther, *Generation and Detection of Fock States*, submitted to Nature (1999).

Mazer

- [78] C.J.Bednar, M.Löffler, M.O.Scully, and H.Walther, *Tunneling and the mazer*, in: F.DeMartini, G.Denardo, and Y.Shih (Hrsg.), *Quantum Interferometry*, Proceedings of an Adriatico Workshop, Trieste, March 1996, S.29, VCH, Weinheim (1996).
- [79] M.O.Scully, G.M.Meyer, and H.Walther, *Induced emission due to quantized motion of ultracold atoms passing through a micromaser cavity*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4144 (1996).
- [80] G.M.Meyer, M.O.Scully, and H.Walther, *Quantum theory of the mazer: I. General theory*, Phys. Rev. A **56**, 4142 (1997).
- [81] M.Löffler, G.M.Meyer, M.Schröder, M.O.Scully, and H.Walther, *Quantum theory of the mazer: II. Extensions and experimental considerations*, Phys. Rev. A **56**, 4153 (1997).
- [82] M.Schröder, K.Vogel, W.P.Schleich, M.O.Scully, and H.Walther, *Quantum theory of the mazer: III. Spectrum*, Phys. Rev. A **56**, 4164 (1997).
- [83] M.Löffler, G.M.Meyer, and H.Walther, *Velocity selection for ultracold atoms using a micromaser*, Europhys. Lett. **41**, 593 (1998).
- [84] G.M.Meyer, M.Löffler, and H.Walther, *One-atom maser and laser with quantized motion*, Laser Physics **8**, 649 (1998).
- [85] M.Löffler, *Korrelationen und Bewegungsquantisierung im Ein-Atom-Maser und -Laser*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1998).

Phasendiffusion

- [86] M.O.Scully, H.Walther, G.S.Agarwal, T.Quang, and W.Schleich, *Micromaser spectrum*, Phys. Rev. A **44**, 5992 (1991).
- [87] L.Z.Wang, *Phase diffusion in micromasers*, Opt. Comm. **92**, 254 (1992).
- [88] C.Wagner, R.J.Brecha, A.Schenzle, and H.Walther, *Phasendiffusion und Meßprozeß im Ein-Atom-Maser*, Phys. Bl. **48**, 465 (1992).
- [89] Ning Lu, *Subnarrow linewidth, hole, and split in micromaser spectrum*, Phys. Rev. Lett. **70**, 912 (1993).
- [90] C.Wagner, R.J.Brecha, A.Schenzle, and H.Walther, *Phase diffusion, entangled states, and quantum measurements in the micromaser*, Phys. Rev. A **47**, 5068 (1993).
- [91] T.Quang, G.S.Agarwal, J.Bergou, M.O.Scully, H.Walther, K.Vogel, and W.P.Schleich, *Calculation of the micromaser spectrum. I. Greens-function approach and approximate analytical techniques*, Phys. Rev. A **48**, 803 (1993).
- [92] K.Vogel, W.P.Schleich, M.O.Scully, and H.Walther, *Calculation of the micromaser spectrum. II. Eigenvalue approach*, Phys. Rev. A **48**, 813 (1993).
- [93] W.P.Schleich and S.M.Barnett (Hrgs.), *Quantum Phase and Phase Dependent Measurements*, Phys. Scripta **T48** (1993).
- [94] Bimalendu Deb and Deb Shankar Ray, *Time-dependent micromaser spectrum*, Phys. Rev. A **49**, 5015 (1994).
- [95] H.-J.Briegel, B.-G.Englert, N.Sterpi, and H.Walther, *One-atom maser: Statistics of detector clicks*, Phys. Rev. A **49**, 2962 (1994).
- [96] S.Arun Kumar and G.S.Agarwal, *Intensity-intensity correlations for the micromaser: Spectral and antibunching characteristics*, Phys. Rev. A **50**, 680 (1994).
- [97] C.Wagner, A.Schenzle, and H.Walther, *Atomic waiting-times and correlation functions*, Opt. Comm. **107**, 318 (1994).
- [98] C.Wagner, *Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Ein-Atom-Maser*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1994).
- [99] B.-G.Englert, T.Gantsog, A.Schenzle, and C.Wagner, *Successive clicks of the same kind in the one-atom maser experiments*, acta phys. slovac **45**, 353 (1995).
- [100] B.-G.Englert, T.Gantsog, A.Schenzle, C.Wagner, and H.Walther, *One-atom maser: Phase-sensitive measurements*, Phys. Rev. A **53**, 4386 (1996).
- [101] A.H.Toor, S.-Y.Zhu, and M.S.Zubairy, *Theory of the two-photon micromaser: Line-width*, Phys. Rev. A **53**, 3529 (1996).
- [102] H.-J.Briegel, B.-G.Englert, and M.O.Scully, *Spectral properties of a micromaser: Atomic-beam statistics and the field correlation function*, Phys. Rev. A **54**, 3603 (1996).
- [103] R.R.McGowan and W.C.Schieve, *Micromaser linewidth*, Phys. Rev. A **55**, 3813 (1997).

- [104] G.Antesberger, C.T.Bodendorf, and H.Walther, *Phase diffusion and spectrum of the one-atom maser field*, in Vorbereitung.

Quanten-Zustands-Rekonstruktion

- [105] E.T.Jaynes, *Information Theory and Statistical Mechanics. II*, Phys. Rev. **108**, 171 (1957); *Information Theory and Statistical Mechanics*, *ibid.* **106**, 620 (1957).
- [106] K.Vogel and H.Risken, *Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase*, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
- [107] M.Wilkens and P.Meystre, *Nonlinear atomic homodyne detection: a technique to detect macroscopic superpositions in a micromaser*, Phys. Rev. A **43**, 3832 (1991).
- [108] S.M.Dutra, P.L.Knight, and H.Moya-Cessa, *Discriminating field mixtures from macroscopic superpositions*, Phys. Rev. A **48**, 3168 (1993).
- [109] S.M.Dutra and P.L.Knight, *Atomic probe for quantum states of the electromagnetic field*, Phys. Rev. A **49**, 1506 (1994).
- [110] G.S.Agarwal and S.Chaturvedi, *Scheme to measure the positive P distribution*, Phys. Rev. A **49**, R665 (1994).
- [111] H.Kühn, D.-G.Welsch, and W.Vogel, *Determination of density matrices from field distributions and quasiprobabilities*, J. mod. Opt. **41**, 1607 (1994).
- [112] U.Leonhardt, H.Paul, and G.M.D'Ariano, *Tomographic reconstruction of the density matrix via pattern functions*, Phys. Rev. A **52**, 4899 (1995).
- [113] G.M.D'Ariano, U.Leonhardt, and H.Paul, *Homodyne detection of the density matrix of the radiation field*, Phys. Rev. A **52**, R1801 (1995).
- [114] S.Wallentowitz and W.Vogel, *Reconstruction of the Quantum Mechanical State of a Trapped Ion*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2932 (1995).
- [115] L.Davidovich, M.Brune, J.M.Raimond, and S.Haroche, *Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes*, Phys. Rev. A **53**, 1295 (1996).
- [116] M.G.A.Paris, *Quantum state measurement by realistic heterodyne detection*, Phys. Rev. A **53**, 2658 (1996).
- [117] P.J.Bardoff, E.Mayr, W.P.Schleich, P.Domokos, M.Brune, J.M.Raimond, and S.Haroche, *Simulation of quantum-state endoscopy*, Phys. Rev. A **53**, 2736 (1996).
- [118] S.Wallentowitz and W.Vogel, *Unbalanced Homodyning For Quantum State Measurements*, Phys. Rev. A **53**, 4528 (1996).
- [119] J.F.Poyatos, R.Walser, J.I.Cirac, and P.Zoller, R.Blatt, *Motion tomography of a single trapped ion*, Phys. Rev. A **53**, R1966 (1996).
- [120] Th.Richter and A.Wünsche, *Determination of occupation probabilities from time-averaged position distributions*, Phys. Rev. A **53**, R1974 (1996).

- [121] V.Bužek, G.Adam, and G.Drobný, *Quantum state reconstruction and detection of quantum coherences on different observation levels*, Phys. Rev. A **54**, 804 (1996); V.Bužek, G.Drobný, R.Derka, G.Adam, and H.Wiedemann, *Quantum State Reconstruction From Incomplete Data*, <http://xxx.uni-augsburg.de/>, quant-ph/9805020 (1998).
- [122] U.Leonhardt and M.Munroe, *Number of phases required to determine a quantum state in optical homodyne tomography*, Phys. Rev. A **54**, 3682 (1996).
- [123] C.D’Helon and G.J.Milburn, *Reconstructing the vibrational state of a trapped ion*, Phys. Rev. A **54**, R25 (1996).
- [124] D.M.Meekhof, C.Monroe, B.E.King, W.M.Itano, and D.J.Wineland, *Generation of Nonclassical Motional States of a Trapped Atom*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
- [125] K.Banaszek and K.Wódkiewicz, *Direct Probing of Quantum Phase Space by Photon Counting*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4344 (1996).
- [126] P.J.Bardoff, C.Leichtle, G.Schrade, and W.P.Schleich, *Endoscopy in the Paul Trap: Measurement of the Vibratory Quantum State of a Single Ion*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2198 (1996).
- [127] S.Schiller, G.Breitenbach, S.F.Pereira, T.Müller, and J.Mlynek, *Quantum Statistics of the Squeezed Vacuum by Measurement of the Density Matrix in the Number State Representation*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2933 (1996).
- [128] D.Leibfried, D.M.Meekhof, B.E.King, C.Monroe, W.M.Itano, and D.J.Wineland, *Experimental Determination of the Motional Quantum State of a Trapped Atom*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).
- [129] U.Leonhardt, M.Munroe, T.Kiss, Th.Richter, and M.G.Raymer, *Sampling of photon statistics and density matrix using homodyne detection*, Opt. Comm. **127**, 144 (1996).
- [130] S.Mancini, P.Tombesi, and V.I.Man’ko, *Density matrix from photon number tomography*, Europhys. Lett. **37**, 79 (1997).
- [131] T.Opatrny and D.-G.Welsch, *Density-matrix reconstruction by unbalanced homodyning*, Phys. Rev. A **55**, 1462 (1997).
- [132] M.Freyberger, *Probing the quantum state of a trapped atom*, Phys. Rev. A **55**, 4120 (1997).
- [133] L.G.Lutterbach and L.Davidovich, *Method for direct measurement of the Wigner function in cavity QED and ion traps*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2547 (1997).
- [134] T.Opatrny, D.-G.Welsch, and W.Vogel, *Least-squares inversion for density-matrix reconstruction*, Phys. Rev. A **56**, 1788 (1997).
- [135] M.S.Kim, *Quasiprobability functions measured by photon statistics of amplified signal fields*, Phys. Rev. A **56**, 3175 (1997).
- [136] C.T.Bodendorf, G.Antesberger, M.S.Kim, and H.Walther, *Quantum-state reconstruction in the one-atom maser*, Phys. Rev. A **57**, 1371 (1998).

- [137] M.S.Kim, G.Antesberger, C.T.Bodendorf, and H.Walther, *Scheme for direct observation of the Wigner characteristic function in cavity QED*, Phys. Rev. A **58**, R65 (1998).
- [138] M.Fortunato, P.Tombesi, and W.P.Schleich, *Endoscopic tomography and quantum nondemolition*, Phys. Rev. A **59**, 718 (1999).

Rydbergatome

- [139] J.R.P.Angel and P.G.H.Sandars, *The hyperfine structure Stark effect, I.Theory*, Proc. Roy. Soc. A. **305**, 125 (1968).
- [140] A.Khadjavi, A.Lurio, and W.Happer, *Stark Effect in the Excited States of Rb, Cs, Cd, and Hg*, Phys. Rev. **167**, 128 (1968).
- [141] T.F.Gallagher, L.M.Humphrey, R.M.Hill, W.E.Cooke, and S.A.Edelstein, *Fine-structure intervals and polarizabilities of highly excited p and d states of sodium*, Phys. Rev. A **15**, 1937 (1977).
- [142] S.Liberman and J.Pinard, *Experimental studies of high-lying Rydberg states in atomic rubidium*, Phys. Rev. A **20**, 507 (1979).
- [143] M.L.Zimmerman, M.G.Littman, M.M.Kash, and D.Kleppner, *Stark structure of the Rydberg states of alkali-metal atoms*, Phys. Rev. A **20**, 2251 (1979).
- [144] F.Gounand, M.Hugon, and P.R.Fournier, *Radiative lifetimes of highly excited states in rubidium*, J. Physique **41**, 119 (1980).
- [145] M.S.O'Sullivan and B.P.Stoicheff, *Scalar polarizabilities and avoided crossings of high Rydberg states in Rb*, Phys. Rev. A **31**, 2718 (1985).
- [146] M.S.O'Sullivan and B.P.Stoicheff, *Scalar and tensor polarizabilities of 2D Rydberg states in Rb*, Phys. Rev. A **33**, 1640 (1986).
- [147] D.Meschede, *Centimeter-wave spectroscopy of highly excited rubidium atoms*, J. Opt. Soc. Am. B **4**, 413 (1987).

Supraleitende K-Band Resonatoren

- [148] N.Klein, *Supraleitende K-Band-Resonatoren für den Ein-Atom-Maser*, Externer Bericht, Gesamthochschule Wuppertal, Wu D 85-5, (1985).
- [149] N.Klein, *Supraleitende Mikrowellenresonatoren für Anwendungen in physikalischen Grundlagenexperimenten*, Externer Bericht, Gesamthochschule Wuppertal, WUB-DIS 89-3, (1989).
- [150] Kapitel 8, [12].

Streufelder von polykristallinem Niob

- [151] E.U.Condon and H.Odishaw, *Handbook of Physics*, McGraw-Hill Book Company, New York, S.8 - 80ff, (1967).

- [152] B.H.Billings, et al. (Ed.), *American Institute of Physics Handbook*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 9-174, (1972).
- [153] R.P.LebLANC, B.C.Vanbrugghe, and F.E.Girouard, *Thermionic emission from a niobium single crystal*, Can. J. Phys. **52**, 1589 (1974).
- [154] R.C.Weast (Ed.), *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 68th Edition, CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida, E-89 (1988).
- [155] M.-C.Desjonquères, and D.Spanjaard, *Concepts in Surface Physics*, Springer Verlag, Berlin (1993).
- [156] M.Weidinger, M.Marrocco, R.T.Sang, and H.Walther, *Characterisation of electric fields in niobium cavities using ultra-high resolution spectroscopy*, Opt. Comm. **141**, 273 (1997).

Danksagung

An erster Stelle bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. H. Walther, der es mir ermöglichte an dem Experiment weiterarbeiten zu können, das während meiner Diplomarbeit entstanden ist. Sein persönliches Engagement an diesem interessanten Grundlagenexperiment und die vertrauensvolle Bereitstellung optimaler Forschungsbedingungen am Max-Planck-Institut trugen sehr zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Besonders danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. G. Agarwal, der viel zur Erklärung der gemessenen Ein-Atom-Maser Resonanz mit zusätzlicher Mikrowelleneinstrahlung beigetragen hat.

Herrn Prof. Dr. B.-G. Englert danke ich für seine Diskussionsbereitschaft bei vielen Problemen der Ein-Atom-Maser Theorie. Sein tiefes Verständnis hat mein Interesse an der Theorie stets wach gehalten.

Gerne denke ich an die fruchtbare Zusammenarbeit mit Prof. Dr. M. S. Kim zurück. Seine sympathische, motivierende Art förderte sehr das Entstehen der mit ihm entwickelten Methoden zur Quanten-Zustandsrekonstruktion. Dabei durfte auch ein kulinarisch koreanisches Essen nicht fehlen.

Vielen Dank an die Theoretiker Dr. Markus Löffler und Dr. Georg Meyer aus unserer Gruppe für ihren unermüdlichen Ehrgeiz, Abstraktes einem Experimentator anschaulich näherbringen zu wollen.

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Experimente wurden zusammen mit Christof Bodendorf durchgeführt. Für seine Hilfe im Labor und die gute Zusammenarbeit möchte ich ihm herzlich danken. Auch die zahlreichen Diskussionen über theoretische Probleme habe ich sehr geschätzt.

Der gesamten Abteilung am Coulombwall, Dr. Oliver Benson, Simon Brattke, Dr. Sihong Gu, Frédéric Grosshans, Dr. Hermann Held, Dr. Natalia Karapanagioti, Gernot Stania, Dr. Benjamin Varcoe und Dr. Matthias Weidinger danke ich für das angenehme Instituts-klima und für die stete Hilfsbereitschaft.

Herrn Dr. Miroslav Steiner danke ich für die PC- und Workstationbetreuung und für so manchen Hochfrequenztechnik-Tip.

Herr H. Käsbauer hat mir die zeitaufwendige Prozedur des Niobresonator-Ausheizens erspart. Vielen Dank.

Prof. Dr. E. Umlauf danke ich für die Hilfe bei der Konstruktion der Piezomontage im Kryostat.

Mein herzlicher Dank gilt der mechanischen Werkstatt unter Leitung von Herrn R. Oehm, die alle Aufträge schnell und mit großer Sorgfalt erledigte. Auch der elektronischen Werkstatt unter Leitung von Herrn Dr. S. Hegewisch danke ich für Ihre Hilfsbereitschaft.

Simon Brattke und Christoph Skornia bin ich sehr dankbar für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit.

Zum Schluß möchte ich noch einmal meinen lieben Eltern, Max und Ingrid, für ihre einmalige Unterstützung während meiner gesamten Ausbildungsphase Dank sagen.

Lebenslauf

Gunter Antesberger
*09.04.1968 in Regensburg
ledig

| | |
|---------------|---|
| 09/74 - 07/78 | Grundschule Lindau-Aeschach |
| 09/78 - 07/87 | Bodenseegymnasium Lindau/B., |
| 09/87 - 04/89 | Zivildienstleistender bei der Sozialstation Lindau e.V. |
| 10/89 - 12/95 | Studium der Physik (Diplom) an der Universität Ulm |
| 01/95 - 12/95 | Externe Diplomarbeit an der LMU-München |
| 01/96 - 02/99 | Promotionsstipendium am Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching |
| seit 03/99 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching |